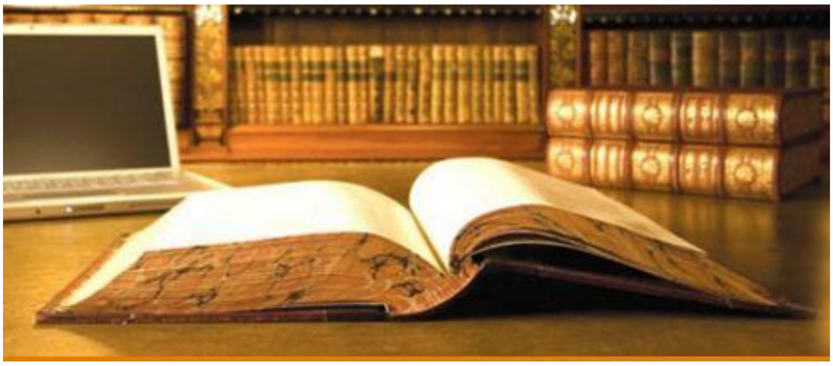
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Επαναληπτικές ασκήσεις
Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια Συνάρτησης
2017-18



Στέλιος Μιχαήλογλου

Εκφωνήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο διάστημα $(e,+\infty)$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο διάστημα $(e,+\infty)$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+\sqrt{x}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x}+e^{\frac{x}{2}}>(1-ex)^3+\sqrt{1-ex}$.

4. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

α) Αν $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x)-4f(x)\right)=-4$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$.

β) Έστω ότι $f^2(x)-4f(x)=x-4$ για κάθε $x\geq 0$ και $f(1)=1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=2-\sqrt{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=e^{2-f(x)}+2$ έχει ακριβώς μία λύση.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Έστω ότι $f(g(x))=\dfrac{x}{x-1}$, $g(x)>1$, $x>e$.

i. Να δείξετε ότι $g(x)=\ln x$.

ii. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο.

6. Έστω περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

α) Αν η f έχει ελάχιστο στο $x_1=-1$, να δείξετε ότι έχει μέγιστο στο $x_2=1$.

β) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

δ) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$,να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και στο $(1,+\infty)$.

ε) Αξιοποιώντας τις πληροφορίες της άσκησης, να σχεδιάσετε μια συνάρτηση f.

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x-1)-f(1-x)\right)$

ζ) Αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)f(x)+x^2=4x-2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ και $\lim_{x\to1^-} f(x)$.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)e^{f(x)}=x^3-6x^2+x+3$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(-1,1)$.

8. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-2,0)$, $B(4,0)$, $\Gamma(0,3)$ και μόνο σ' αυτά.

α) Να δείξετε ότι $f(2)>0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5f(5)f(6)+3x-2=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4,+\infty)$.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(10)x^3-4x^2+f(1)}{f(3)x^2-5x-2}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(6,8)$ τέτοιο, ώστε $3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8)$.

9. Έστω περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x\to2}\left(f(x)+\eta\mu\pi x-1\right)=9$.

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to-2} f(x)=-10$.

β) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\pi$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1\in[-1,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\frac{f(-1)+f(1)}{2}$.

γ) Να βρείτε την f αν ισχύει ότι $x^2f(x)\ge x^5+x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $x+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+1}=1+\sqrt{2}$.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=x_0^2-x_0$.

Λύσεις των ασκήσεων

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο διάστημα $(e,+\infty)$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x>0 \\ 1-\ln x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq e\end{cases}$, άρα $A_f=(0,e)\cup(e,+\infty)$.

β) Έστω $x_1,x_2\in A_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε:

$$\frac{\ln x_1}{1-\ln x_1}=\frac{\ln x_2}{1-\ln x_2}\Leftrightarrow \ln x_1-\cancel{\ln x_1\ln x_2}=\ln x_2-\cancel{\ln x_1\ln x_2}\Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f\ 1-1\ .$$

$$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{\ln x}{1-\ln x}=y\Leftrightarrow \ln x=y-y\ln x\Leftrightarrow y\ln x+\ln x=y\Leftrightarrow (y+1)\ln x=y\ (1)$$

Αν $y+1=0\Leftrightarrow y=-1$ τότε η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $y\neq -1$ είναι $\ln x=\dfrac{y}{y+1}\Leftrightarrow x=e^{\frac{y}{y+1}}$

Αν $x\in(0,e)$ τότε $0<e^{\frac{y}{y+1}}<e\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{y}{y+1}}>0 \text{ ισχύει} \\ e^{\frac{y}{y+1}}<e\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1}<1\Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1}-1<0\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}<0\Leftrightarrow$

$\dfrac{-1}{y+1}<0\Leftrightarrow y+1>0\Leftrightarrow y>-1$. Όταν $x\in A_1=(0,e)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(-1,+\infty)$.

Αν $x\in(e,+\infty)$ τότε $e^{\frac{y}{y+1}}>e\Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1}>1\Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1}-1>0\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}>0\Leftrightarrow$

$\dfrac{-1}{y+1}>0\Leftrightarrow y+1<0\Leftrightarrow y<-1$.

Όταν $x\in A_2=(e,+\infty)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=(-\infty,-1)$.

Επειδή $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(y)=e^{\frac{y}{y+1}}$, $y\neq -1$ άρα $f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$, $x\neq -1$.

γ) Για κάθε $x>e$ είναι $\ln x>\ln e=1>0\Rightarrow 1-\ln x<0$ άρα $f(x)<0$.

Όμως $f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x+1}}>0$ για κάθε $x>e$, άρα $f(x)<f^{-1}(x)$, $x>e$

δ) i. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1-\ln x}\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow \\ u\to-\infty}}{\overset{\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{u}{1-u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{u}{-u}=-1$

ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{1-\ln x}\underset{\substack{x\to +\infty\Rightarrow \\ u\to+\infty}}{\overset{\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{1-u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{-u}=-1$

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x+1}} \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1}{\overset{\frac{x}{x+1}=u}{=}} \lim\limits_{u\to1} e^{u}=e$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\frac{e}{-1}=-e$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{1-\ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο διάστημα $(e,+\infty)$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x>0 \\ 1-\ln x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq e\end{cases}$, άρα $A_f=(0,e)\cup(e,+\infty)$.

β) Έστω $x_1,x_2\in A_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε:

$\frac{\ln x_1}{1-\ln x_1}=\frac{\ln x_2}{1-\ln x_2}\Leftrightarrow \ln x_1-\cancel{\ln x_1\ln x_2}=\ln x_2-\cancel{\ln x_1\ln x_2}\Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f\ 1-1$.

$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{\ln x}{1-\ln x}=y\Leftrightarrow \ln x=y-y\ln x\Leftrightarrow y\ln x+\ln x=y\Leftrightarrow (y+1)\ln x=y\ (1)$

Αν $y+1=0\Leftrightarrow y=-1$ τότε η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $y\neq-1$ είναι $\ln x=\frac{y}{y+1}\Leftrightarrow x=e^{\frac{y}{y+1}}$

Αν $x\in(0,e)$ τότε $0<e^{\frac{y}{y+1}}<e\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{y}{y+1}}>0 \text{ ισχύει} \\ e^{\frac{y}{y+1}}<e\end{cases} \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}<1\Leftrightarrow \frac{y}{y+1}-1<0\Leftrightarrow \frac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}<0\Leftrightarrow$

$\frac{-1}{y+1}<0\Leftrightarrow y+1>0\Leftrightarrow y>-1$. Όταν $x\in A_1=(0,e)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(-1,+\infty)$.

Αν $x\in(e,+\infty)$ τότε $e^{\frac{y}{y+1}}>e\Leftrightarrow \frac{y}{y+1}>1\Leftrightarrow \frac{y}{y+1}-1>0\Leftrightarrow \frac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}>0\Leftrightarrow$

$\frac{-1}{y+1}>0\Leftrightarrow y+1<0\Leftrightarrow y<-1$.

Όταν $x\in A_2=(e,+\infty)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=(-\infty,-1)$.

Επειδή $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(y)=e^{\frac{y}{y+1}}$, $y\neq-1$ άρα $f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$, $x\neq-1$.

γ) Για κάθε $x>e$ είναι $\ln x>\ln e=1>0\Rightarrow 1-\ln x<0$ άρα $f(x)<0$.

Όμως $f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x+1}}>0$ για κάθε $x>e$, άρα $f(x)<f^{-1}(x)$, $x>e$

δ) i. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1-\ln x} \underset{\substack{x\to 0^+ \Rightarrow \\ u\to -\infty}}{\overset{\ln x = u}{=}} \lim\limits_{u\to -\infty} \dfrac{u}{1-u} = \lim\limits_{u\to -\infty} \dfrac{u}{-u} = -1$

ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{1-\ln x} \underset{\substack{x\to +\infty \Rightarrow \\ u\to +\infty}}{\overset{\ln x = u}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{u}{1-u} = \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{u}{-u} = -1$

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} \underset{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x}=1}{\overset{\frac{x}{x+1}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 1} e^u = e$, άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \dfrac{e}{-1} = -e$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x} + e^{\frac{x}{2}} > (1-ex)^3 + \sqrt{1-ex}$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \ge 0$, οπότε $A_f = [0,+\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^3 < x_2^3 \\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{array}\right. \overset{+}{\Rightarrow} x_1^3 + \sqrt{x_1} < x_2^3 + \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [0,+\infty) \Rightarrow f\ 1-1$$
, οπότε η f αντιστρέφεται.

β) i. Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε το σύνολο τιμών της είναι το

$f(A) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [0,+\infty) = A_{f^{-1}}$.

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$f^{-1}(A) = \left[f^{-1}(0), \lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)\right) = A_f = [0,+\infty)$ οπότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ είναι $f^{-1}(x) > 0$ όταν το x παίρνει πολύ μεγάλες τιμές.

Για πολύ μεγάλες τιμές του x έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{f^{-1}(x)} \le \frac{1}{f^{-1}(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f^{-1}(x)} \le \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)} \le \frac{1}{f^{-1}(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f^{-1}(x)} = \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{1}{f^{-1}(y)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right) = 0$, οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)} = 0$

4. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

α) Αν $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x) - 4f(x)\right) = -4$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$.

β) Έστω ότι $f^2(x) - 4f(x) = x - 4$ για κάθε $x \ge 0$ και $f(1) = 1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - \sqrt{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = e^{2-f(x)} + 2$ έχει ακριβώς μία λύση.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x)-4f(x)\right)=-4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x)-4f(x)+4\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-2\right)^2=0$.

Είναι $-\left|f(x)-2\right| \le f(x)-2 \le \left|f(x)-2\right| \Leftrightarrow 2-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2} \le f(x) \le 2+\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\right)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2+\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\right)=2$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$.

β) i. $f^2(x)-4f(x)=x-4 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4=x \Leftrightarrow \left(f(x)-2\right)^2=x$ (1)

Για κάθε $x>0$ είναι $\left(f(x)-2\right)^2>0 \Rightarrow f(x)-2\ne 0$.

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $g(1)=f(1)-2=1-2=-1<0$, είναι $g(x)<0$ για κάθε $x>0$, οπότε η (1) γίνεται: $f(x)-2=-\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x)=2-\sqrt{x}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\sqrt{x}\right)=2$, άρα

$f(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{x}, & x>0 \\ 2 & , x=0 \end{cases}$, οπότε $f(x)=2-\sqrt{x}$ για κάθε $x\ge 0$.

ii. Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε:

$\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1}>-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{x_1}>2-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\searrow[0,+\infty) \Rightarrow f\ 1-1$

$f(x)=y \Leftrightarrow 2-\sqrt{x}=y \Leftrightarrow 2-y=\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow y\le 2$, τότε $(2-y)^2=x \Leftrightarrow x=y^2-4y+4$, άρα

$f^{-1}(y)=y^2-4y+4,\ y\le 2$ οπότε $f^{-1}(x)=x^2-4x+4,\ x\le 2$.

iii. $2f(x)=e^{2-f(x)}+2 \Leftrightarrow 4-2\sqrt{x}-e^{2-2+\sqrt{x}}-2=0 \Leftrightarrow 2-2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2-2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}},\ x\ge 0$.

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε: $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{x_1}>-2\sqrt{x_2} \\ e^{\sqrt{x_1}}<e^{\sqrt{x_2}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2-2\sqrt{x_1}>2-2\sqrt{x_2} \\ -e^{\sqrt{x_1}}>-e^{\sqrt{x_2}} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 2-2\sqrt{x_1}-e^{\sqrt{x_1}}>2-2\sqrt{x_2}-e^{\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2) \Rightarrow g\searrow[0,+\infty)$.

Είναι $g(0)=2-2\sqrt{0}-e^{\sqrt{0}}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\right) \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow \\ \omega\to+\infty}}{\overset{\sqrt{x}=\omega}{=}} \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(2-2\omega-e^{\omega}\right)=2-\infty-\infty=-\infty$

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=[0,+\infty)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]=(-\infty,1]$.

Επειδή $0\in g(A)$ και $g\searrow A=[0,+\infty)$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in A$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$, επομένως η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow 2-2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}=0$ έχει μοναδική ρίζα.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Έστω ότι $f(g(x))=\dfrac{x}{x-1},\ g(x)>1,\ \ x>e$.

i. Να δείξετε ότι $g(x)=\ln x$.

ii. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$, οπότε $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$, τότε

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}-\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1}=\frac{\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}-e^{x_1}-\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+e^{x_2}}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)}=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)}$$

Είναι $x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2}-e^{x_1}>0$ (1).

Αν $x_1<x_2<0$ τότε $e^{x_1}<e^{x_2}<1 \Leftrightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2}>-1 \Leftrightarrow 1-e^{x_1}>1-e^{x_2}>0$ (2).

Από $(1),(2)\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>0 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow(-\infty,0)$

Αν $0<x_1<x_2$ τότε $1<e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow -1>-e^{x_1}>-e^{x_2} \Leftrightarrow 0>1-e^{x_1}>1-e^{x_2}$ (3).

Από $(1),(3)\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>0 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow(0,+\infty)$

β) $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x-1}=y \Leftrightarrow e^x=ye^x-y \Leftrightarrow y=ye^x+e^x \Leftrightarrow e^x(y+1)=y$ (4)

Αν $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$ η (4) είναι αδύνατη, οπότε για $y\neq 1$ είναι $e^x=\dfrac{y}{y+1}$ (5).

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει $\dfrac{y}{y+1}>0 \Leftrightarrow y(y+1)>0 \Leftrightarrow y<-1$ ή $y>0$ (6)

Αν $x<0$ τότε:

$$e^x<e^0=1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}<1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}<0 \Leftrightarrow \frac{-1}{y+1}<0 \Leftrightarrow y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$$ και λόγω της (6), είναι $y>0$.

Αν $x>0$ τότε:

$$e^x>e^0=1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}>1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}>0 \Leftrightarrow \frac{-1}{y+1}>0 \Leftrightarrow y+1<0 \Leftrightarrow y<-1$$

Στο διάστημα $A_1=(-\infty,0)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(0,+\infty)$ και στο $A_2=(0,+\infty)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=(-\infty,-1)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$, η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Από τη σχέση (5) έχουμε: $x=\ln\dfrac{y}{y+1}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{y}{y+1},\ y\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, οπότε

$$f^{-1}(x)=\ln\frac{x}{x+1},\ y\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty).$$

γ) i. $f\left(g\left(x\right)\right)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{e^{\ln x}}{e^{\ln x}-1}\Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\ln x\right)\overset{f\searrow(e,+\infty)\Rightarrow f\,1-1}{\Leftrightarrow} g\left(x\right)=\ln x$

ii. Αρκεί η εξίσωση $f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-\ln x=0$ να έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0,+\infty\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h\left(x\right)=f\left(x\right)-\ln x$, $x>0$.

Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$, τότε: $\begin{cases} f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\ (f\searrow\left(0,+\infty\right)) \\ \ln x_1<\ln x_2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right) \\ -\ln x_1>-\ln x_2 \end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}$

$f\left(x_1\right)-\ln x_1>f\left(x_2\right)-\ln x_2\Leftrightarrow h\left(x_1\right)>h\left(x_2\right)\Rightarrow h\searrow\left(0,+\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow\\ u\to 1^+}}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 1^+}\dfrac{u}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1^+}\left(u\dfrac{1}{u-1}\right)=1\left(+\infty\right)=+\infty$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}h\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f\left(x\right)-\ln x\right)=+\infty-\left(-\infty\right)=+\infty+\infty=+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}\underset{\substack{x\to +\infty\Rightarrow\\ u\to +\infty}}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{u}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1^+}\dfrac{u}{u}=1$, οπότε

$\lim\limits_{x\to +\infty}h\left(x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f\left(x\right)-\ln x\right)=1-\left(+\infty\right)=-\infty$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left(0,+\infty\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$h\left(A_2\right)=\left(\lim\limits_{x\to +\infty}h\left(x\right),\lim\limits_{x\to 0^+}h\left(x\right)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in h\left(A_2\right)$ και $h\searrow\left(0,+\infty\right)$ υπάρχει μοναδικό $x_0\neq\left(0,+\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $h\left(x_0\right)=0$, οπότε η εξίσωση $h\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left(x\right)-\ln x=0$ έχει μοναδική ρίζα.

6. Έστω περιττή συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to +\infty}f\left(x\right)=0$.

α) Αν η f έχει ελάχιστο στο $x_1=-1$, να δείξετε ότι έχει μέγιστο στο $x_2=1$.

β) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to -\infty}f\left(x\right)=0$

δ) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-1\right)$,να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\left(1,+\infty\right)$.

ε) Αξιοποιώντας τις πληροφορίες της άσκησης, να σχεδιάσετε μια συνάρτηση f.

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f\left(x-1\right)-f\left(1-x\right)\right)$

ζ) Αν η f είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\left(x-1\right)f\left(x\right)+x^2=4x-2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,1\right)$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει ότι $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για $x=1$ προκύπτει: $f\left(-1\right)=-f\left(1\right)$.

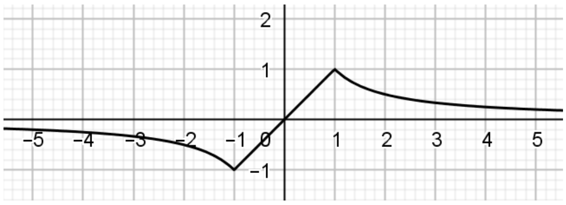
Επειδή η f έχει ελάχιστο στο $x_1=-1$, ισχύει ότι $f\left(x\right)\geq f\left(-1\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας όπου x το –x προκύπτει: $f\left(-x\right)\geq f\left(-1\right)\Leftrightarrow -f\left(x\right)\geq -f\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)\leq f\left(1\right)$, οπότε η f έχει μέγιστο στο $x_2=1$.

β) Η σχέση (1) για $x=0$ γίνεται $f\left(0\right)=-f\left(0\right)\Leftrightarrow 2f\left(0\right)=0\Leftrightarrow f\left(0\right)=0$, οπότε η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-f(-x)\right] \underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{-x=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\left(-f(u)\right) = 0$

δ) Έστω $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε $-1 > -x_1 > -x_2$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ είναι $f(-x_1) < f(-x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) < -f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (1,+\infty)$.

ε) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < -1 \\ x, & -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$



στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x-1) - f(1-x)\right) \overset{f\ \text{περιττή}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x-1) + f(x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x-1) \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{x-1=u}{=}} 2\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = 0$

ζ) $(x-1)f(x) + x^2 = 4x - 2 \Leftrightarrow (x-1)f(x) + x^2 - 4x + 2 = 0$.

Έστω $g(x) = (x-1)f(x) + x^2 - 4x + 2,\ x \in [0,1]$.

Είναι $g(0) = (0-1)f(0) + 0^2 - 4\cdot 0 + 2 = 2 > 0$, $g(1) = (1-1)f(1) + 1^2 - 4\cdot 1 + 2 = -1 < 0$, δηλαδή $g(0)g(1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)f(x) + x^2 = 4x - 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
γ) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
δ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.
ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)e^{f(x)} = x^3 - 6x^2 + x + 3$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $\dfrac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, άρα $A_f = (-1,1)$.

Έστω $-1 < x_1 < x_2 < 1$, τότε: $\begin{cases} 1 > -x_1 > -x_2 > -1 \\ 0 < 1 + x_1 < 1 + x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x_1 > 1 - x_2 > 0 \\ \ln(1+x_1) < \ln(1+x_2) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \ln(1-x_1) > \ln(1-x_2) \\ -\ln(1+x_1) > -\ln(1+x_2) \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \ln(1-x_1) - \ln(1+x_1) > \ln(1-x_2) - \ln(1+x_2) \Leftrightarrow$

$\ln\dfrac{1-x_1}{1+x_1} > \ln\dfrac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (-1,1)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{1-x}{1+x}=y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}=e^y \Leftrightarrow 1-x=e^y+xe^y \Leftrightarrow 1-e^y=x\left(1+e^y\right) \Leftrightarrow x=\frac{1-e^y}{1+e^y}$

Είναι $-1<x<1 \Leftrightarrow -1<\frac{1-e^y}{1+e^y}<1 \overset{1+e^y>0}{\Leftrightarrow} -1-e^y<1-e^y<1+e^y \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -1-\cancel{e^y}<1-\cancel{e^y} \text{ ισχύει για κάθε } y\in\mathbb{R} \\ \cancel{1}-e^y<\cancel{1}+e^y \end{cases} \Leftrightarrow 2e^y>0$ ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{1-e^y}{1+e^y}$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x\in(-1,1)$ και $-x\in(-1,1)$.

$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$ άρα η f είναι περιττή.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1-x}{1+x}=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[(1-x)\frac{1}{1+x}\right]=2(+\infty)=+\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\ln\frac{1-x}{1+x}\underset{\substack{x\to-1^+\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{\frac{1-x}{1+x}=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x}{1+x}=0$ και $\frac{1-x}{1+x}>0$ για κάθε $x\in(-1,1)$, οπότε:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\ln\frac{1-x}{1+x}\underset{\substack{x\to1^-\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{\frac{1-x}{1+x}=u}{=}}\lim_{x\to0^+}\ln u=-\infty$$

ε) $(x+1)e^{f(x)}=x^3-6x^2+x+3 \Leftrightarrow \cancel{(x+1)}\frac{1-x}{\cancel{1+x}}=x^3-6x^2+x+3 \Leftrightarrow x^3-6x^2+2x+2=0$.

Έστω $g(x)=x^3-6x^2+2x+2$

Είναι $g(-1)=-1-6-2+2=-7<0,\ g(0)=2>0$ και $g(1)=1-6+2+2=-1<0$.

Επειδή $g(-1)g(0)<0,\ g(0)g(1)<0$ και η g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0],[0,1]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$, άρα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

8. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-2,0)$, $B(4,0)$, $\Gamma(0,3)$ και μόνο σ' αυτά.

α) Να δείξετε ότι $f(2)>0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5f(5)f(6)+3x-2=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4,+\infty)$.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(10)x^3-4x^2+f(1)}{f(3)x^2-5x-2}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(6,8)$ τέτοιο, ώστε $3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8)$.

Λύση

α) Επειδή η C_f διέρχεται από τα σημεία Α,Β είναι $f(-2)=0$ και $f(4)=0$. Επειδή η C_f δεν τέμνει τον

άξονα x΄x σε κανένα άλλο σημείο εκτός των Α και Β, είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq -2$ και $x \neq 4$.
Επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2),(-2,4)$ και $(4,+\infty)$. Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο Γ είναι $f(0)=3>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-2,4)$, οπότε και $f(2)>0$.

β) Έστω $g(x)=x^5 f(5)f(6)+3x-2,\ x \in [0,1]$.
Είναι $g(0)=-2$ και $g(1)=f(5)f(6)+1$.
Επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(4,+\infty)$ οι αριθμοί $f(5)$ και $f(6)$ είναι ομόσημοι, άρα $f(5)f(6)>0$, οπότε $g(1)>0$.
Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(0)g(1)<0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Για κάθε $x>4 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(4)=0$, άρα $f(10)<0$.

i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(10)x^3-4x^2+f(1)}{f(3)x^2-5x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(10)x^{\cancel{3}}}{f(3)\cancel{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(10)}{f(3)}x\right)\overset{f(3)>0}{=}-\infty$$

ii. 1ος τρόπος
Είναι $6<7<8 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(6)>f(7)>f(8)$ (1).
Επίσης $f(6)=f(6)>f(8)$ (2) και $f(6)>f(8)=f(8)$ (3).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:
$$3f(6)>f(6)+f(7)+f(8)>3f(8) \Leftrightarrow f(8)<\frac{f(6)+f(7)+f(8)}{3}<f(6)$$
Επειδή η f είναι συνεχής στο $[6,8]$ σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (6,8)$ τέτοιο ώστε:
$f(x_0)=\dfrac{f(6)+f(7)+f(8)}{3} \Leftrightarrow 3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[6,8]$ το x_0 είναι μοναδικό.

2ος τρόπος
Έστω $h(x)=3f(x)-f(6)-f(7)-f(8),\ x \in [6,8]$. Είναι
$h(6)=3f(6)-f(6)-f(7)-f(8)=2f(6)-f(7)-f(8)=[f(6)-f(7)]+[f(6)-f(8)]>0$γιατί
$6<7<8 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(6)>f(7)>f(8)$, οπότε $f(6)-f(7)>0$ και $f(6)-f(8)>0$.
Επίσης $h(8)=3f(8)-f(6)-f(7)-f(8)=2f(8)-f(6)-f(7) \Leftrightarrow$
$h(8)=[f(8)-f(6)]+[f(8)-f(7)]<0$, και επειδή η g είναι συνεχής στο $[6,8]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (6,8)$ τέτοιος ώστε: $6(x_0)=0 \Leftrightarrow 3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8)$.
Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει ότι: για κάθε $x_1,x_2 \in [6,8]$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$.
Τότε: $3f(x_1)>3f(x_2) \Leftrightarrow 3f(x_1)-f(6)-f(7)-f(8)>3f(x_2)-f(6)-f(7)-f(8) \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$.
Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[6,8]$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

9. Έστω περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+\eta\mu\pi x-1\right)=9$.

α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-10$.

β) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\pi$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1\in[-1,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$.

γ) Να βρείτε την f αν ισχύει ότι $x^2 f(x)\ge x^5+x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Έστω $g(x)=f(x)+\eta\mu\pi x-1$ με $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=9$, τότε $f(x)=g(x)-\eta\mu\pi x+1$ και

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(g(x)-\eta\mu\pi x+1\right)=9-0+1=10$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)\overset{f\ \text{περιττή}}{=}\lim_{x\to -2}\left(-f(-x)\right)\underset{\substack{x\to -2\Rightarrow\\ u\to 2}}{\overset{-x=u}{=}}\lim_{u\to 2}\left(-f(u)\right)=-10$$

β) i. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=-2$, είναι $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-10$ και επειδή είναι συνεχής στο $x=2$, είναι $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=10$.

Επειδή $f(-2)<\pi<f(2)$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ., υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\pi$.

ii. Επειδή η f στο $[-1,1]$ θα έχει μια μέγιστη M και μια ελάχιστη m τιμή στο διάστημα αυτό, οπότε $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[-1,1]$. Άρα $m\le f(-1)\le M$, $m\le f(1)\le M$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$$2m\le f(-1)+f(1)\le 2M\Leftrightarrow m\le\frac{f(-1)+f(1)}{2}\le M.$$

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_1\in[-1,1]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_1)=\frac{f(-1)+f(1)}{2}.$$

γ) Για $x\neq 0$ είναι $x^2 f(x)\ge x^5+x^3\Leftrightarrow f(x)\ge\dfrac{\cancel{x^2}\left(x^3+x\right)}{\cancel{x^2}}\Leftrightarrow f(x)\ge x^3+x$ (1)

Αν στην (1) αντικαταστήσουμε όπου x το –x προκύπτει:

$$f(-x)\ge(-x)^3-x\overset{f\ \text{περιττή}}{\Leftrightarrow}-f(x)\ge -x^3-x\Leftrightarrow f(x)\le x^3+x\ \ (2)$$

Από τις (1), (2) είναι $f(x)=x^3+x$ για κάθε $x\neq 0$.

Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ και για $x=0$ είναι

$$f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0,\ \text{οπότε}\ f(x)=\begin{cases}x^3+x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Επειδή όμως από τον τύπο $y=x^3+x$ για $x=0$ προκύπτει $y=0$, τελικά είναι $f(x)=x^3+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $x+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+1}=1+\sqrt{2}$.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=x_0^2-x_0$.

Λύση

α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$

Είναι $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\sqrt{x_1^2+1}-x_2-\sqrt{x_2^2+1}\Leftrightarrow$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{\left(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right)\left(\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\right)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\Leftrightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{\left(\sqrt{x_1^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x_2^2+1}\right)^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\Leftrightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{x_1^2+\cancel{1}-x_2^2-\cancel{1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\Leftrightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\Leftrightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left(1+\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left(\frac{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}+x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\quad(1)$$

Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0\Leftrightarrow f(x)>0$,

άρα $f(x_1)>0$, $f(x_2)>0$, $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>0$ και $x_1-x_2<0$, άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$ και αντιστρέφεται.

$f(x)=y,\ y>0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=y-x$ (2)

Αν $x\le 0$, τότε $y-x>0$, ενώ αν $x>0$, τότε $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}>2x>x \Leftrightarrow y>x$. Επειδή $y>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η (2) γίνεται:

$x^2+1=(y-x)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+1=y^2-2xy+\cancel{x^2} \Leftrightarrow 2xy=y^2-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-1}{2y},\ y>0$, άρα

$f^{-1}(y)=\dfrac{y^2-1}{2y},\ y>0$, οπότε και $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x},\ x>0$.

δ) $x+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+1}=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x)+\sqrt{f^2(x)+1}=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$f(f(x))=1+\sqrt{2}$ (3).

Παρατηρούμε ότι $f(1)=1+\sqrt{2}$ οπότε η (3) γίνεται:

$f(f(x))=f(1) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=f(0) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} x=0$

ε) Έστω $g(x)=f(x)-x^2+x=x+\sqrt{x^2+1}-x^2+x=\sqrt{x^2+1}-x^2+2x,\ x\in[3,4]$

Είναι $g(3)=\sqrt{10}-9+6=\sqrt{10}-3>0$ γιατί $3<\sqrt{10}<4$ και

$g(4)=\sqrt{17}-16+8=\sqrt{17}-8<0$ γιατί $4<\sqrt{17}<5 \Leftrightarrow -4<\sqrt{17}-8<-3$, δηλαδή

$g(3)g(4)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[3,4]$, λόγω του θ.Bolzano, υπάρχει $x_0\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0^2-x_0$.