Τρίτη, 18 Ιουλίου 2017

Πρόβλημα 1. Για κάθε ακέραιο $a_0 > 1$, ορίζουμε την ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ως εξής:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{αν } \sqrt{a_n} \text{ ακέραιος,} \\ a_n + 3, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \qquad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του a_0 για τις οποίες υπάρχει αριθμός A τέτοιος, ώστε $a_n = A$ για άπειρες τιμές του n.

Πρόβλημα 2. Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ που είναι τέτοιες, ώστε για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y, να ισχύει:

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Πρόβλημα 3. Ένας κυνηγός και ένα αόρατο κουνέλι παίζουν ένα παιγνίδι στο Ευκλείδειο επίπεδο. Το σημείο εκκίνησης A_0 του κουνελιού και το σημείο εκκίνησης B_0 του κυνηγού είναι τα ίδια. Μετά από $n-1$ γύρους του παιγνιδιού, το κουνέλι βρίσκεται στο σημείο A_{n-1} και ο κυνηγός στο σημείο B_{n-1}. Στον $n-$στό γύρο του παιγνιδιού, τρία πράγματα συμβαίνουν κατά σειρά:

(i) Το κουνέλι κινείται αόρατα σε ένα σημείο A_n τέτοιο, ώστε η απόσταση μεταξύ των σημείων A_{n-1} και A_n να είναι ακριβώς ίση με 1.

(ii) Μία συσκευή παρακολούθησης αναφέρει ένα σημείο P_n στον κυνηγό. Η μόνη εγγυημένη πληροφορία που δίνει η συσκευή παρακολούθησης στον κυνηγό είναι ότι η απόσταση μεταξύ των σημείων P_n και A_n είναι το πολύ 1.

(iii) Ο κυνηγός κινείται ορατά σε ένα σημείο B_n τέτοιο, ώστε η απόσταση μεταξύ των σημείων B_{n-1} και B_n να είναι ακριβώς ίση με 1.

Είναι πάντοτε δυνατόν, ανεξάρτητα από το πώς κινείται το κουνέλι και ανεξάρτητα από το ποια σημεία αναφέρονται από τη συσκευή παρακολούθησης, για τον κυνηγό να επιλέξει τις κινήσεις του έτσι, ώστε μετά από 10^9 γύρους να είναι σίγουρος ότι η απόσταση μεταξύ αυτού και του κουνελιού είναι το πολύ 100;

Language: Greek

Διάρκεια διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τετάρτη, 19 Ιουλίου, 2017

Πρόβλημα 4. Έστω R και S διαφορετικά σημεία ενός κύκλου Ω τέτοια, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα RS να μην είναι διάμετρός του. Έστω ℓ η εφαπτομένη του κύκλου Ω στο σημείο R. Σημείο T είναι τέτοιο, ώστε το S να είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος RT. Στο μικρότερο τόξο RS του Ω επιλέγουμε σημείο J, ώστε ο περιγεγραμμένος κύκλος Γ του τριγώνου JST να τέμνει την εφαπτομένη ℓ σε δύο διαφορετικά σημεία. Έστω A το κοινό σημείο του Γ και της ℓ, που βρίσκεται πλησιέστερα στο R. Η ευθεία AJ τέμνει ξανά τον κύκλο Ω στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι η ευθεία KT εφάπτεται του κύκλου Γ.

Πρόβλημα 5. Δίνεται ακέραιος $N \geq 2$. Ένα σύνολο $N(N+1)$ ποδοσφαιριστών, μεταξύ των οποίων δεν υπάρχουν δύο με το ίδιο ύψος, στέκονται σε μια γραμμή. Ο προπονητής θέλει να απομακρύνει $N(N-1)$ ποδοσφαιριστές από αυτή τη γραμμή, έτσι ώστε να απομείνει μία νέα γραμμή από $2N$ ποδοσφαιριστές, στην οποία να ικανοποιούνται οι ακόλουθες N συνθήκες:

(1) Κανένας δε στέκεται μεταξύ των δύο πιο ψηλών ποδοσφαιριστών,
(2) Κανένας δε στέκεται μεταξύ του τρίτου και τέταρτου ψηλότερων ποδοσφαιριστών,

⋮

(N) Κανένας δε στέκεται μεταξύ των δύο πιο κοντών ποδοσφαιριστών.

Να αποδείξετε ότι αυτό είναι πάντοτε δυνατόν.

Πρόβλημα 6. Ένα διατεταγμένο ζεύγος ακεραίων (x, y) είναι ένα *πρωταρχικό σημείο*, αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των x και y είναι 1. Αν S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο πρωταρχικών σημείων, να αποδείξετε ότι υπάρχουν ένας θετικός ακέραιος n και ακέραιοι $a_0, a_1, \ldots, a_n$ τέτοιοι, ώστε για κάθε ζεύγος (x, y) του S, να έχουμε:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

Language: Greek

Διάρκεια Διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες