8ο Διαγώνισμα

19-4-2021

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

i. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$

β) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

μονάδες 2+2+2

Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, με $f(0)=2$, $f(1)=1$ και $f(3)=-1$. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α. Υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$. Β. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1$

Γ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ Δ. $[-1,2]\subseteq f(\Delta)$

Ε. Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το – 1.

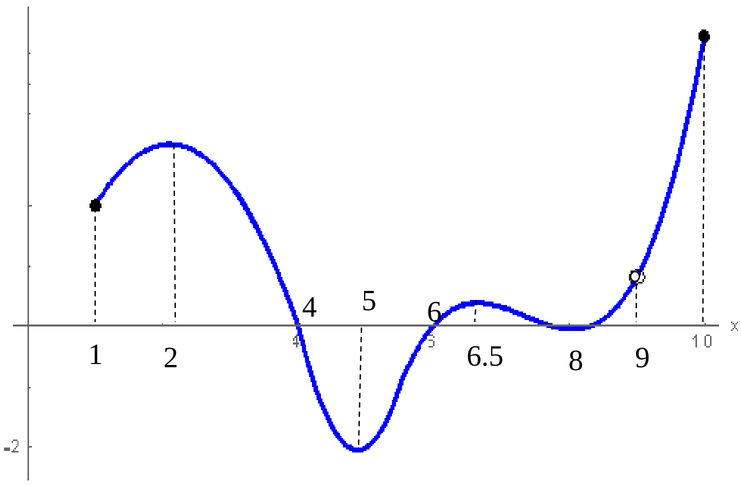
β) Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με :

Α. $\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}$ Β. $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$ Γ. $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}$ Δ. $\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ Ε. $\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$

μονάδες 4

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f: $[1,10]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμης στο $[1,9)\cup(9,10]$ και συνεχής στο $x_0=9$.



Β1. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

μονάδες 5

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της παραγώγου της f στα σημεία με τετμημένες $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=6{,}5$ και $x_4=8$ είναι παράλληλες στον άξονα x΄x,

Β3. να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f στο διάστημα $[1,9)$.

μονάδες 7

Β4. να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in (2,8)$ τέτοια, ώστε $f^{(3)}(\xi_1)=f^{(3)}(\xi_2)=f^{(3)}(\xi_3)=0$, αν η f είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $(2,8)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [2,8].

μονάδες 7

Θέμα Γ

Γ1. Ένα σώμα Κ κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2+y^2=4$ και η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 6 μ/sec. Όταν το σώμα περνάει από το σημείο Α(-1, $\sqrt{3}$), τότε:

α) Αφού αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης τη χρονική στιγμή που το σώμα περνάει από το Α είναι αρνητικός, να τον υπολογίσετε.

μονάδες 6

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του λόγου των αποστάσεων του κινητού Κ από τις ευθείες $x=-3$ και $y=-3$ τη χρονική στιγμή που αυτό διέρχεται από το Α.

μονάδες 6

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο, του παραπάνω κύκλου, που δεν είναι κάτω από τον x΄x άξονα είναι συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

μονάδες 3

β) Αν επιπλέον $g:\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=2\eta\mu x$ να βρείτε την συνάρτηση $h(x)=(f\circ g)(x)$.

μονάδες 4

γ) Αν $h(x)=-2\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και ότι η εξίσωση

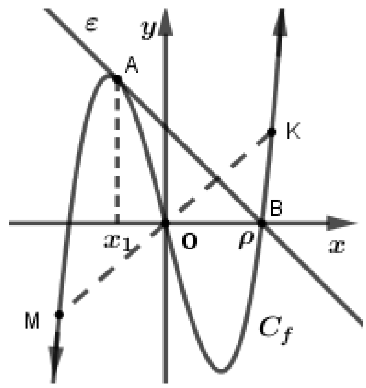
$\left(h^{-1}(-2\sigma\upsilon\nu x)\right)^3-\frac{\pi^2}{4}x-1=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση f $3^{ου}$ βαθμού της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα. Το συμμετρικό οποιουδήποτε σημείου Κ της C_f ως προς την αρχή Ο των αξόνων είναι σημείο Μ της C_f.

Η ευθεία ε: $y=-x+2$ εφάπτεται της C_f στο $A(x_1,f(x_1))$ και την τέμνει στο $B(\rho,0)$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3-4x$.

μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι κάθε εφαπτομένη της C_f την τέμνει σε άλλο σημείο.

μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν 4 σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x)=2x^4-7x+2$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

μονάδες 5

Δ5. Έστω η συνάρτηση $h(x)=e^{\lambda x}-x^3+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το ελάχιστο της h έχει τη μέγιστη τιμή του.

μονάδες 5

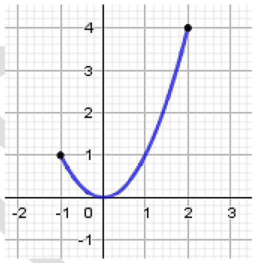
Καλή Τύχη!

Θέμα Α

Α1. Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$
$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0)$$

Α2. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.



Α3. α) Ψευδής

β) Στη συνάρτηση $f(x)=x^2,\ x\in[-1,2]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,2]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$ με $f'(x)=2x$, είναι $f'(0)=0$ όμως $f(-1)=1,\ f(2)=4$ δηλαδή $f(-1)\neq f(2)$.

Α4. α) i. Λ ii. Σ **β)** Σ **Α5. α)** Ε **β)** Ε

Θέμα Β

Β1. Κρίσιμα είναι τα εσωτερικά σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη αλλά είναι συνεχής και οι ρίζες της $f'(x)=0$.

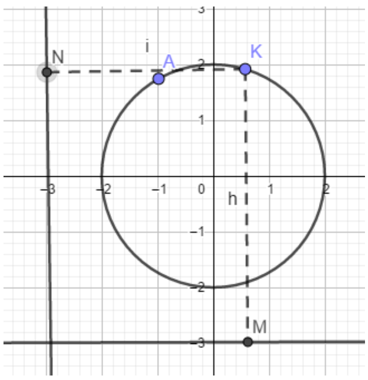
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,9)\cup(9,10]$ και τα εσωτερικά σημεία στα οποία $f'(x)=0$ είναι τα x =4, x = 6, x = 8 και το σημείο στο οποίο η f δεν είναι παραγωγίσιμη αλλά είναι συνεχής είναι το x=9 οπότε αυτά είναι τα κρίσιμα σημεία της f.

Β2. Για κάθε $x\in[1,4)\cup(6,8)\cup(8,10]$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $[1,4],[6.10]$, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.
Για κάθε $x\in(4,6)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[4,6]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(1)$, τοπικό μέγιστο το $f(4)$, τοπικό ελάχιστο το $f(6)$ και τοπικό μέγιστο το $f(10)$.

Β3. Στα $[1,2],[5,6],[6,6.5],\ [8,9)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι κυρτή στα διαστήματα αυτά.
Στα $[2,5],[6.5,8]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι κοίλη στα διαστήματα αυτά.
Επειδή στα σημεία με τετμημένες $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=6.5$ και $x_4=8$ οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της παραγώγου της f είναι παράλληλες στον άξονα x΄x ,έχουμε: $f''(2)=f''(5)=f''(6,5)=f''(8)=0$ και η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν των σημείων αυτών κατά συνέπεια η f έχει σημεία καμπής τα $(2,f(2)),(5,f(5)),(6.5,f(6.5))$ και $(8,f(8))$.

Β4. Η f'' είναι συνεχής στα $[2,5]$,[5 ,6.5],[6.5 ,8] και παραγωγίσιμη στα(2,5),(5,6.5),(6.5,8) και $f''(2)=f''(5)=f''(6,5)=f''(8)=0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχουν $\xi_1\in(2,5)\subseteq(2,8),\ \xi_2\in(5,6.5)\subseteq(2,8)$ και $\xi_3\in(6.5,8)\subseteq(2,8)$ τέτοια, ώστε $f^{(3)}(\xi_1)=f^{(3)}(\xi_2)=f^{(3)}(\xi_3)=0$.

Θέμα Γ



Γ1.α) Επειδή το σημείο Α είναι σημείο του $2^{ου}$ τεταρτημορίου και η τετμημένη του ελαττώνεται το σημείο Α κινείται κατά τη θετική φορά. Αφού το κινητό καθώς περνάει από το Α κινείται κατά τη θετική φορά η τεταγμένη του θα ελαττώνεται και άρα θα είναι αρνητικός ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του. Ισχύει ότι $x^2(t)+y^2(t)=4$ και άρα $2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0$ Όμως $x'(t_0)=-6$ μ/sec οπότε $-6x(t_0)+y(t_0)y'(t_0)=0$ (1). Για t= t_0 όπου το κινητό διέρχεται από το Α ισχύει $x(t_0)=-1$ και $y(t_0)=\sqrt{3}$ οπότε η (1) γίνεται $-6(-1)+\sqrt{3}\cdot y'(t_0)=0$ οπότε $y'(t_0)=-\dfrac{6}{\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}$ μ/sec..

β) Ο λόγος των αποστάσεων του κινητού Κ από τις ευθείες $x=-3$ και $y=-3$ είναι $d(t)=\dfrac{3+x(t)}{3+y(t)}$ αφού $x(t),\ y(t)\in[-2,2]$. Τότε $d'(t)=\dfrac{x'(t)(3+y(t))-y'(t)(3+x(t))}{(3+y(t))^2}$ και για t το t_0 έχουμε:

$$d'(t_0)=\frac{-6(3+y(t_0))-y'(t_0)(3+x(t_0))}{(3+y(t_0))^2}=\frac{-6(3+\sqrt{3})+2\sqrt{3}(3-1)}{(3+\sqrt{3})^2}=\frac{-2(9+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})^2}$$

Γ2. α) Η $x^2+y^2=4$ επειδή $y\geq 0$ θα είναι $y=\sqrt{4-x^2}$ οπότε σε κάθε $x\in[-2,2]$ αντιστοιχεί μοναδικό y άρα θα είναι συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ με $x\in[-2,2]$.

β) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι

$A_h=A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g\ /\ g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]/\ 2\eta\mu x\in[-2,2]\right\}=\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ και

$h(x)=\sqrt{4-4\eta\mu^2 x}=2\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-2\sigma\upsilon\nu x$ που είναι γνησίως αύξουσα αφού το συνx στο δεύτερο τεταρτημόριο είναι γνησίως φθίνουσα και άρα η h αντιστρέφεται.

γ) η εξίσωση $(h^{-1}(-2\sigma\upsilon\nu x))^3-\dfrac{\pi^2}{4}x-1=0 \Leftrightarrow x^3-\dfrac{\pi^2}{4}x-1=0$.

Θέτοντας $\beta(x)=x^3-\dfrac{\pi^2}{4}x-1$ η συνάρτηση β είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ ως πολυωνυμική και $\beta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^3}{8}-\dfrac{\pi^3}{8}-1$ =-1< 0 και $\beta(\pi)=\pi^3-\dfrac{\pi^3}{4}-1=\dfrac{3\pi^3-4}{4}$ >0 οπότε από το θεώρημα Bolzano η β θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Θέμα Δ

Δ1. Επειδή η f είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού, έχει τη μορφή $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\ \alpha\in\mathbb{R}^*,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$.

Επειδή διέρχεται από το (0,0) ισχύει ότι $f(0)=0\Leftrightarrow\delta=0$.

Επειδή το συμμετρικό οποιουδήποτε σημείου της C_f ως προς την αρχή Ο των αξόνων είναι σημείο της C_f, η f είναι περιττή, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow$

$\alpha(-x)^3+\beta(-x)^2+\gamma(-x)=-\alpha x^3-\beta x^2-\gamma x\Leftrightarrow -\cancel{\alpha x^3}+\beta x^2-\cancel{\gamma x}=-\cancel{\alpha x^3}-\beta x^2-\cancel{\gamma x}\Leftrightarrow$

$2\beta x^2=0 \Leftrightarrow \beta=0$ γιατί η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=\alpha x^3+\gamma x$.
Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το Β, ισχύει ότι $0=-\rho+2 \Leftrightarrow \rho=2$.
Επειδή το Β είναι σημείο της C_f ισχύει ότι $f(2)=0 \Leftrightarrow 8\alpha+2\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=-4\alpha$, οπότε $f(x)=\alpha x^3-4\alpha x$.
Επειδή η ε έχει με την C_f δύο κοινά σημεία από τα οποία το ένα είναι το Β, η εξίσωση
$f(x)=-x+2 \Leftrightarrow \alpha x^3-4\alpha x+x-2=0 \Leftrightarrow \alpha x^3+(1-4\alpha)x-2=0$ (1) έχει δύο ρίζες από τις οποίες η μία είναι η x = 2.
Με κατάλληλο σχήμα Horner προκύπτει:

α	0	1-4α	-2	2
	2α	4α	2	
α	2α	1	0	

$\alpha x^3+(1-4\alpha)x-2=(x-2)(\alpha x^2+2\alpha x+1)$, οπότε η (1) γίνεται:
$x=2$ ή $\alpha x^2+2\alpha x+1=0$ (2)
Κατά συνέπεια η (2) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα οπότε
$\Delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha^2-4\alpha=0 \Leftrightarrow 4\alpha(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ που απορρίπτεται ή $\alpha=1$. Τότε $f(x)=x^3-4x$.

Δ2. Έστω $\Gamma(x_0,f(x_0))$ τυχαίο σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Γ έχει εξίσωση
ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=(3x_0^2-4)x-3x_0^3+\cancel{4x_0}+x_0^3-\cancel{4x_0} \Leftrightarrow y=(3x_0^2-4)x-2x_0^3$

Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε το σύστημα $\begin{cases} y=(3x_0^2-4)x-2x_0^3 \\ y=f(x) \end{cases}$.Οπότε:

$f(x)=(3x_0^2-4)x-2x_0^3 \Leftrightarrow x^3-4x-(3x_0^2-4)x+2x_0^3=0 \Leftrightarrow x^3-3x_0^2x+2x_0^3=0 \Leftrightarrow$
$(x-x_0)(x^2+x_0x-2x_0^2)=0 \Leftrightarrow x=x_0$ ή $x^2+x_0x-2x_0^2=0 \Leftrightarrow x=x_0$ ή $x=-2x_0$.
Οπότε έχουν κοινό σημείο και το $\Delta(-2x_0,f(-2x_0))$.

Δ3. Έστω ότι τα σημεία $Z(\kappa,f(\kappa))$, $H(\lambda,f(\lambda))$, $\Theta(\mu,f(\mu))$, $I(\nu,f(\nu))$ με $\kappa<\lambda<\mu<\nu$ είναι

συνευθειακά. Τότε $\lambda_{ZH}=\lambda_{H\Theta}=\lambda_{IH} \Leftrightarrow \dfrac{f(\lambda)-f(\kappa)}{\lambda-\kappa}=\dfrac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}=\dfrac{f(\nu)-f(\mu)}{\nu-\mu}$ (3)

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\kappa,\lambda]$, $[\lambda,\mu]$, $[\mu,\nu]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\kappa,\lambda)$, $\xi_2\in(\lambda,\mu)$, $\xi_3\in(\mu,\nu)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\lambda)-f(\kappa)}{\lambda-\kappa}$, $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}$ και $f'(\xi_3)=\dfrac{f(\nu)-f(\mu)}{\nu-\mu}$.

Από τη σχέση (1) όμως προκύπτει ότι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)$.
$f'(\xi_1)=f'(\xi_2) \Leftrightarrow 3\xi_1^2-4=3\xi_2^2-4 \Leftrightarrow \xi_1^2=\xi_2^2$
Επειδή τα ξ_1,ξ_2 είναι σε διαφορετικά διαστήματα ισχύει ότι $\xi_1=-\xi_2$
Είναι $f'(\xi_2)=f'(\xi_3) \Leftrightarrow 3\xi_2^2-4=3\xi_3^2-4 \Leftrightarrow \xi_2^2=\xi_3^2$.
Επειδή τα ξ_2,ξ_3 είναι σε διαφορετικά διαστήματα ισχύει ότι $\xi_2=-\xi_3$. Άρα $\xi_1=\xi_3$ που είναι άτοπο.
Άρα δεν υπάρχουν 4 σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

Δ4. Για τα κοινά σημεία των f, g έχουμε την εξίσωση
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-4x=2x^4-7x+2 \Leftrightarrow 2x^4-x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3+x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow$
$x=1$ ή $2x^3+x^2+x-2=0$
Έστω $\varphi(x)=2x^3+x^2+x-2,\ x\in[0,1]$. Είναι $\varphi(0)=-2<0,\ \varphi(1)=2>0$, οπότε $\varphi(0)\varphi(1)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow$ $f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_0 στο $(0,1)$.

Είναι $\varphi'(x)=6x^2+2x^2+1>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και η ρίζα x_0 του Bolzano είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Δ5. $h(x)=e^{\lambda x}-x^3+x^3-4x=e^{\lambda x}-4x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=\lambda e^{\lambda x}-4\ge 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}\ge\frac{4}{\lambda}\Leftrightarrow \lambda x\ge \ln\frac{4}{\lambda}\Leftrightarrow x\ge\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda}$.

Για κάθε $x>\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda}$, είναι $h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda},+\infty\right)$.

Για κάθε $x>\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda}$, είναι $h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda}\right]$.

Η h έχει ελάχιστο το $h\left(\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda}\right)=e^{\lambda\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda}}-4\frac{\ln\frac{4}{\lambda}}{\lambda}=\frac{4}{\lambda}-4\frac{\ln 4-\ln\lambda}{\lambda}=\frac{4-4\ln 4+4\ln\lambda}{\lambda}$

Έστω $t(\lambda)=\frac{4-4\ln 4+4\ln\lambda}{\lambda},\ \lambda>0$. Η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$t'(\lambda)=\frac{\frac{4}{\lambda}\cdot\lambda-(4-4\ln 4+4\ln\lambda)}{\lambda^2}=\frac{4\ln 4-4\ln\lambda}{\lambda^2}$$

$$t'(\lambda)\ge 0\Leftrightarrow\frac{4\ln 4-4\ln\lambda}{\lambda^2}\ge 0\Leftrightarrow 4\ln 4-4\ln\lambda\ge 0\Leftrightarrow \ln\lambda\le\ln 4\Leftrightarrow 0<\lambda\le 4.$$

Για κάθε $\lambda\in(0,4)$ είναι $t'(\lambda)>0$ και επειδή η t είναι συνεχής στο $(0,4]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\lambda\in(4,+\infty)$ είναι $t'(\lambda)<0$ και επειδή η t είναι συνεχής στο $[4,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η t έχει μέγιστο για $\lambda = 4$, οπότε το ελάχιστο της h γίνεται μέγιστο για $\lambda = 4$.