**6η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½ ΕΤΩΝ**
Târgu Mureş, ΡΟΥΜΑΝΙΑ, 23-29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
**JBMO 2002**

Χρόνος: 4 ώρες **Ιούνιος 2002**

Επιμέλεια: Μάριος Αντωνιάδης – Ανδρέας Φιλίππου

**ΠΡΌΒΛΗΜΑ 1.**
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC με AC = BC. Έστω P σημείο του τόξου AB που δεν περιέχει το C. Αν είναι $CD \perp PB$, $D \in PB$, να αποδείξετε ότι: PA + PB = 2PD

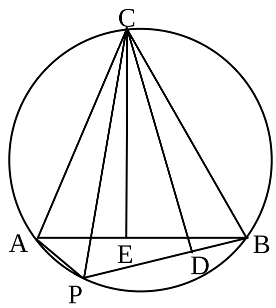
**ΠΡΌΒΛΗΜΑ 2.**
Δύο κύκλοι $C_1$, $C_2$ με άνισες ακτίνες τέμνονται στα σημεία A, B και τα κέντρα τους $O_1$, $O_2$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας AB. Έστω $B_1$, $B_2$ τα αντιδιαμετρικά σημεία του B στους κύκλους $C_1$, $C_2$ αντιστοίχως. Θεωρούμε το σημείο $M_1$ του κύκλου $C_1$ και το σημείο $M_2$ του κύκλου $C_2$ έτσι ώστε: $\widehat{AO_1M_1} = \widehat{AO_2M_2} < 180°$. Αν το $B_1$ είναι σημείο του κύκλου $C_1$ εσωτερικό της γωνίας $\widehat{AO_1M_1}$, το $B_2$ είναι σημείο του $C_2$ εσωτερικό της γωνίας $\widehat{AO_2M_2}$ και το M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $B_1B_2$, να αποδείξετε ότι: $\widehat{MM_1B} = \widehat{MM_2B}$

**ΠΡΌΒΛΗΜΑ 3.**
Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{1}{b(a+b)} + \dfrac{1}{c(b+c)} + \dfrac{1}{a(a+c)} \geq \dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$ όπου a, b, c. θετικοί αριθμοί.

**ΠΡΌΒΛΗΜΑ 4.**
Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι N οι οποίοι έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) Ο αριθμός N να έχει ακριβώς 16 διαιρέτες $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N$,
(ii)Ο διαιρέτης που σημειώνεται $d_5$ είναι ίσος με $(d_2 + d_4)d_6$.
(iii)

**<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>**

**1. Α΄ Λύση**



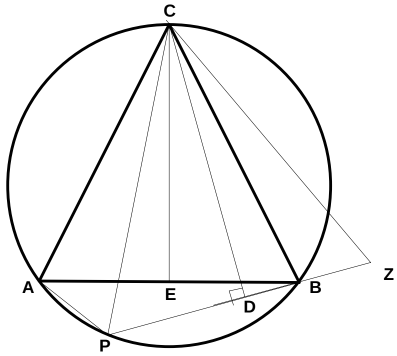

APBC εγγεγραμμένο τετράπλευρο, άρα από το πρώτο θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε:
$PB \cdot BC + PB \cdot AC = PC \cdot AB$, $(AC = BC) \Rightarrow$
$PA + PB = \dfrac{PC \cdot AB}{AC}$ (1).

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε: $2PD = \dfrac{PC \cdot AB}{AC}$ (2)

Φέρουμε $CE \perp AB$, τότε $AB = 2AE$ είναι ισοδύναμο να αποδειχθεί ότι $2PD = \dfrac{2 \cdot AE \cdot PC}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{PD}{PC} = \dfrac{AE}{AC} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\widehat{CPB} = \sigma\upsilon\nu\widehat{CAB}$ που ισχύει, αφού οι γωνίες $\widehat{CPB}$ και $\widehat{CAB}$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο.

**Β΄ Λύση.**

Προεκτείνουμε το PB κατά τμήμα $BZ = AZ$. Το τρίγωνο $BCZ$ και $APC$ είναι ίσα ($CD = CZ$ και το τρίγωνο $CPZ$ είναι ισοσκελές με $CD = AZ$. Έτσι το σημείο $D$ είναι το μέσο του τμήματος $PZ$, άρα
$2PZ = PZ = PB + BZ = PA + PB$

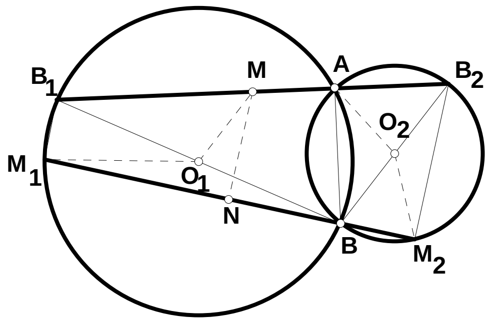



**2.** *Α΄ Λύση*

Επειδή είναι $\widehat{B_1AB} + \widehat{BAB_2} = 90^0 + 90^0 = 180^0$, τα σημεία $B_1$, A, $B_2$ είναι συνευθειακά.

$$\widehat{ABM_1} = \frac{\widehat{AO_1M_1}}{2} = \frac{\widehat{AO_2M_2}}{2} = \frac{360^0 - \widehat{AB_2M_2}}{2} = 180^0 - \frac{\widehat{AB_2M_2}}{2} = 180^0 - \widehat{ABM_2} \Rightarrow$$

$\widehat{ABM_1} = \widehat{ABM_2} = 180°$ δηλαδή τα σημεία $M_1,\ B,\ M_2$ είναι συνευθειακά.




Από τα $ABM_1B_1$, $ABM_2B_2$ εγγεγραμμένα τετράπλευρα $\Rightarrow$

$\widehat{AB_1M_1} + \widehat{AB_2M_2} = \widehat{ABM_1} + \widehat{ABM_2} = 180^0 \Rightarrow B_1M_1M_2B_2$ είναι τραπέζιο.

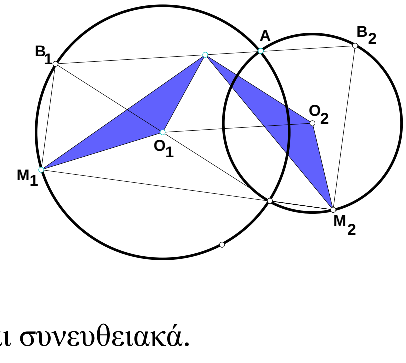
Ν μέσον του $M_1M_2 \Rightarrow$ MN διάμεσος τραπεζίου $\Rightarrow MN \parallel B_1M_1 \parallel B_2M_2$.

Άρα $MN \perp M_1M_2$ αφού $B_1M_1 \perp M_1M_2$ ($\widehat{B_1M_1B_2} = 90°$). Άρα στο τρίγωνο $MM_1M_2$ το τμήμα MN είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο $MM_1M_2$ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{MM_1B} = \widehat{MM_2B}$.

*Β΄ Λύση*

$\widehat{B_1AB} = 90^0 = \widehat{BAB_2} \Rightarrow \widehat{B_1AB} + \widehat{BAB_2} = 180^0$

$\Rightarrow B_1,\ A,\ B_2$ είναι συνευθειακά.




$$\widehat{ABM_1} = \frac{\widehat{AO_1M_1}}{2} = \frac{\widehat{AO_2M_2}}{2} = \frac{360^0 - \widehat{AB_2M_2}}{2}$$

$$= 180^0 - \frac{\widehat{AB_2M_2}}{2} = 180^0 - \widehat{ABM_2}$$

$\Rightarrow \widehat{ABM_1} + \widehat{ABM_2} = 180^0 \Rightarrow$ τα σημεία $M_1, B, M_2$ είναι συνευθειακά.

$$\left.\begin{array}{l} MO_1 = \dfrac{BB_2}{2} = AO_2 \\ MO_2 = \dfrac{BB_1}{2} = AO_1 \\ AM = AM\ (\kappa o \iota \nu \acute{\eta}\ \pi \lambda \varepsilon \upsilon \rho \acute{\alpha}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overset{\Delta}{\mathrm{MO_1A}}\right) = \left(\overset{\Delta}{\mathrm{MO_2A}}\right) \Rightarrow \widehat{\mathrm{MO_1A}} = \widehat{\mathrm{MO_2A}}$$

$\mathrm{O_1O_2} // \mathrm{B_1B_2} \Rightarrow \mathrm{O_1O_2} // \mathrm{MA}$, $\left(\widehat{\mathrm{MO_1A}} = \widehat{\mathrm{MO_2A}}\right) \Rightarrow MO_1O_2A$ εγγράψιμο ισοσκελές τραπέζιο.

Άρα $MO_1 = AO_2 = O_2M_2$ και $MO_2 = AO_1 = O_1M_1$

$\widehat{MO_1M_1} = \widehat{AO_1M_1} - \widehat{MO_1A} = \widehat{AO_2M_2} - \widehat{MO_2A} = \widehat{MO_2M_2}$

Άρα τα τρίγωνα $M\overset{\Delta}{O_1}M_1$, $M\overset{\Delta}{O_2}M_2$ είναι ίσα $\Rightarrow MM_1 = MM_2 \Rightarrow MM_1M_2$ ισοσκελές τρίγωνο $\Rightarrow \widehat{MM_1B} = \widehat{MM_2B}$. ($M_1, B, M_2$ είναι συνευθειακά)

**3.** *Α΄ Λύση*

Εφαρμόζουμε την ανισότητα του γεωμετρικού και αριθμητικού μέσου.

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)} \geq \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc,$$

και $\left(\dfrac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a)$. (2)

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 \geq abc(a+b)(b+c)(c+a) \Rightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)^3}{3^3} \cdot \frac{2^3(a+b+c)^3}{3^3}^3 \geq abc(a+b)(b+c)(c+a) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)^3} \geq \frac{3^3 \cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

*Β΄ Λύση*

Από την ανισότητα του Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)}\right] \geq \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{2(a+b+c)} \Rightarrow$$

Άρα είναι αρκετό να αποδειχθεί ότι: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \dfrac{1}{2(a+b+c)} \geq \dfrac{27}{2(a+b+c)^2} \Leftrightarrow$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 27$$

Ισχύει $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq (x+y+z)^2$ για κάθε $x, y, z$ θετικούς ακέραιους.

Εάν $a=\sqrt{x},\ b=\sqrt{y},\ c=\sqrt{z}\ \Rightarrow\ a+b+c\geq\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{z}\right)^3}{3}$

Η απόδειξη συμπληρώνεται εάν δειχθεί ότι: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)\geq 9$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ανισότητα του αρμονικού-γεωμετρικού μέσου.

**4.** Αρχικά παρατηρούμε ότι ο αριθμός N δεν έχει περισσότερες από 4 διακριτούς πρώτους διαιρέτες και $d=2$.

Από δεδομένα έχουμε ότι $2+d_4\geq d_5\geq 7$ άρα $d_4\geq 5$.

Επειδή $d_4<d_5\leq 2+d_4$ έχουμε $d_5=1+d_4$ (1) ή $d_5=2+d_4$ (2)

Εάν ισχύει η περίπτωση (1) έχουμε $d_6=2+d_4$ και τότε το N είναι πολλαπλάσιο του 3, άρα $d_3=3$. Επειδή $6/N$ έχουμε ότι $d_4=6\ \Rightarrow\ d_5=7,\ \ d_6=8$, έτσι το $4/N$ και $d_4=4$ το οποίο είναι άτοπο.

Εάν ισχύει η περίπτωση (2) : $d_5=2+d_4$. Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Εάν $4/N$, επειδή $d_4>5\Rightarrow d_3=4\ \Rightarrow\ 8/N$

$d_6\geq 8$ πρέπει $8\in\{d_4,d_5,d_6\}$ που είναι άτοπο.

Εάν $d_4=8\ \Rightarrow\ d_5=10$, άρα $5/N$ και $d_4=5$ αδύνατο.

Εάν $d_5=8\ \Rightarrow\ d_4=6$, άρα $3/N$ και $d_3=3$ αδύνατο.

Εάν $d_6=8\ \Rightarrow\ d_5=7$, $d_4=5$ άρα $10/N$. Αλλά $d_7=(2+5)8=56>10$, αδύνατο.

Επειδή N δεν διαιρείται με το 4 τότε ο $d_3$ είναι πρώτος αριθμός.

- Εάν $3/N$, έχουμε ότι $d_3=3$. Επειδή $6/N$ και $d_4\geq 6\ \Rightarrow\ d_4=6$ άρα $d_5=8\ \Rightarrow\ 4/N$ αδύνατο.

Έτσι ο αριθμός 3 δεν διαιρεί τον N άρα $d_3\geq 5$ και $d_4\geq 7$.

Ο αριθμός N και $2+d_4$ δεν είναι πολλαπλάσια του 4 άρα $d_4$ είναι περιττός.

Ο $2+d_4$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 4 άρα ο $d_4$ είναι περιττός. Επειδή ο $2+d_4$ και $d_4$ δεν είναι διαιρετοί με το 3 έχουμε ότι $d_4=3k+2$ για κάποιες ακέραιες τιμές του κ και επειδή περιττός τότε $d_4=6l+5$ για κάποιες τιμές του $l$.

$d_5\leq 16\ \Rightarrow\ 7\leq d_4\leq 14$. Η μόνο λύση είναι $d_4=11$ και $d_3=13$.

Ισχύει $2d_3/N$ και $2d_3\geq d_4\ \Rightarrow\ d_3\geq 6$.

Εφόσον $d_3$ είναι πρώτος και $2d_3\geq d_4\ \Rightarrow\ d_3\geq 6$.

$d_3$ είναι πρώτος και $d_3<11\ \Rightarrow\ d_3=7$. Άρα $N=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\Rightarrow \boxed{N=2002}$