6ο Διαγώνισμα

5-4-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει μόνον αν $x_0 \in A$ ».

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$f(0)=4,\ f'(0)=3,\ f'(5)=6,\ g(0)=5,\ g'(0)=1, g'(4)=2$, τότε $(f\circ g)'(0)=(g\circ f)'(0)$.

β) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x′x. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα x′x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-1$

μονάδες 6

Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α. 1 Β.- 1 Γ.0 Δ. 27 Ε. δεν υπάρχει

β) Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ Β. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$ Γ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

Δ. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ Ε. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x^3+x+1)\right]$ ΣΤ. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x^3+x-1)\right]$

μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ με $h(x)=x^3$.

Β1. Να βρείτε την συνάρτηση $f=g\circ h$.

μονάδες 3

Έστω $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3-1},\ x\neq 1$

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

μονάδες 4

Β4. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών και τέλος να την χαράξετε.

μονάδες 6

Β5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Αν για την συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύουν : $f(x)(f(x)+2x)-1=0$ και $f(0)=1$ τότε :

Γ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 6

Γ2. Αν $g(x)=\ln x$ να ορίσετε τη σύνθεση $h=g\circ f$ και να αποδείξετε ότι είναι περιττή συνάρτηση.

μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi>0$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\sqrt{\xi^2+1}+x=0 \text{ για κάθε } x>0.$$

μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $h(x)+h(x^3)<h(x^2)+h(x^5)$.

μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- $f(1)=1$
- $f'(x)\neq\ln x$ για κάθε $x>0$
- η f' είναι συνεχής
- η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)>\ln x$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $0<x_0<1$.

μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο x_0.

μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>x(\ln x-1)+2$.

μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ είναι $f(x)<f'(x)(x-1)+1$.

μονάδες 6

Καλή Τύχη!

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).
Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$, $A=\mathbb{R}-\{1\}$. Τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$ άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και το 1 δεν ανήκει στο Α.

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ **Α5. α)** Γ **β)** Α, Γ, Ε

Θέμα Β

Β1. Είναι $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$ και $A_h=\mathbb{R}$.

$A_{g\circ h}=\{x\in A_h \,/\, h(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^3\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 1\}=\mathbb{R}-\{1\}$

$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$.

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με παράγωγο:

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x^3-1)-3x^2(x^3+1)}{(x^3-1)^2}=\dfrac{3x^2(x^3-1-x^3-1)}{(x^3-1)^2}=-\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^2}\le 0$ για κάθε $x\neq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ οπότε δεν έχει ακρότατα.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ως ρητή με παράγωγο:

$$f''(x)=-\frac{12x(x^3-1)^2-12x^2(x^3-1)3x^2}{(x^3-1)^4}=-\frac{12x(x^3-1)^2-36x^4(x^3-1)}{(x^3-1)^4}=$$

$$=-\frac{12x\cancel{(x^3-1)}(x^3-1-3x^3)}{(x^3-1)^{\cancel{4}}}=-\frac{12x(-2x^3-1)}{(x^3-1)^3}=\frac{12x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}$$

- $12x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$

- $2x^3+1\geq 0 \Leftrightarrow x^3\geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\geq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x\geq -\frac{\sqrt[3]{2}^2}{2} \Leftrightarrow x\geq -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\left(x^3-1\right)^3\geq 0 \Leftrightarrow x^3-1\geq 0 \Leftrightarrow x^3\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	0	1	$+\infty$
$12x$	-	-	+		+
$2x^3+1$	-	+	+		+
$\left(x^3-1\right)^3$	-	-	-		+
$f''(x)$	-	+	-		+
f	∩	∪	∩		∪

Σ.Κ. Σ.Κ.

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x<-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$.

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},0\right)$ άρα η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},0\right]$.

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1)$.

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x>1$ άρα η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή για $x=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ και για $x=0$.

Τα σημεία καμπής είναι τα σημεία: $A\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},f\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)\right)\equiv A\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},-\frac{1}{3}\right)$ και $B\left(0,f(0)\right)\equiv B(0,-1)$.

B3. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\left(x^3+1\right)\frac{1}{x^3-1}\right)=2(-\infty)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\left(x^3+1\right)\frac{1}{x^3-1}\right)=2(+\infty)=+\infty$ άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$ άρα η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$ άρα η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

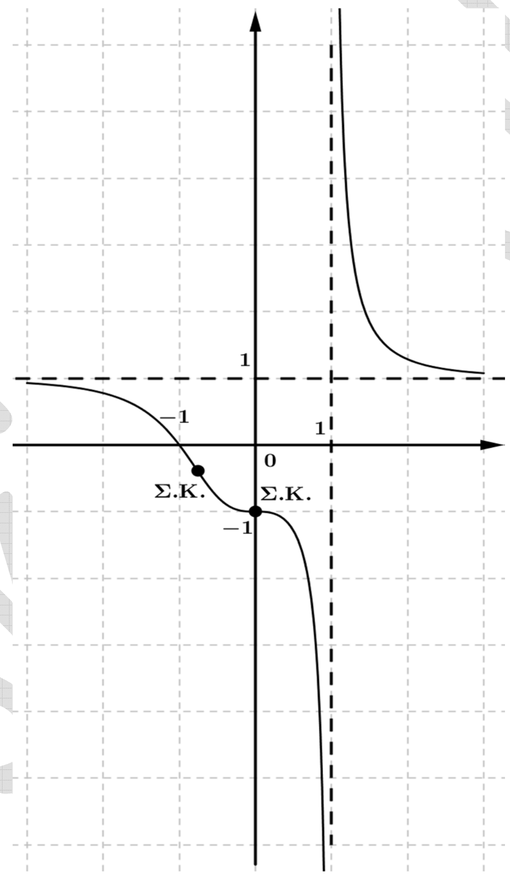
Επειδή η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$,, δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

B4. Είναι $f(0)=-1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο καμπής $B(0,-1)$.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x^3-1}=0\Leftrightarrow x^3+1\Leftrightarrow x^3=-1\Leftrightarrow x=-1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\Gamma(-1,0)$.

x	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ $\quad$ 0	0 $\quad$ 1	1	1 $\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-		+
$f'(x)$	-	-	-		-
f	$1 \searrow -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} \searrow -1$	$-1 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -1$
		Σ.Κ.	**Σ.Κ.**		

Επίσης είναι $-1<-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}<0$ (Πράγματι $-1<-\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Leftrightarrow 2>\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 8>4$) και $-1<-\frac{3}{5}<0$ (Πράγματι $-1<-\frac{3}{5} \Leftrightarrow 5>3$)



Β5. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,1)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right)=(-\infty,1)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(1,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)=(1,+\infty)$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\mathbb{R}-\{1\}$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$ και $f(\Delta_1)\cap f(\Delta_2)=\varnothing$, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Η αντίστροφή f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A)=\mathbb{R}-\{1\}$.

Για κάθε $x, y \neq 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x^3-1} = y \Leftrightarrow x^3+1 = x^3y - y \Leftrightarrow$

$x^3y - x^3 = y+1 \Leftrightarrow x^3(y-1) = y+1 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x^3 = \frac{y+1}{y-1}$ (1)

Αν $\frac{y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow y < -1$ ή $y > 1$ και τότε η (1) γίνεται $x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{y-1}}$.

Αν $\frac{y+1}{y-1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)(y-1) \leq 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq y < 1$ και τότε η (1) γίνεται $x = -\sqrt[3]{-\frac{y+1}{y-1}}$.

Είναι $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y+1}{y-1}}, & y > 1 \text{ ή } y < -1 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y+1}{y-1}}, & -1 \leq y < 1 \end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, & x < -1 \text{ ή } x > 1 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x+1}{x-1}}, & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε για $x \in \mathbb{R}: f^2(x) + 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$(f(x)+x)^2 = x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{(f(x)+x)^2} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$

$f^2(x) + 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f(x)+x| = \sqrt{x^2+1}$

Έστω $g(x) = f(x) + x,\ x \in \mathbb{R}$, τότε $|g(x)| = \sqrt{x^2+1}$ (1).

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, και επειδή $g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$ έχουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε $|g(x)| = g(x)$ και η (1) γίνεται

$g(x) = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x,\ x \in \mathbb{R}$

Γ2. $A_f = \mathbb{R},\ A_g = (0, +\infty)$, $A_h = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{x^2+1} > x\} = \mathbb{R}$ διότι

$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ και $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Για κάθε $x \in A_h$ και $-x \in A_h$ και

$h(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} + x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} =$

$\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-1} = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

Γ3. Έστω $\varphi(t) = h(t),\ t \in [0, x]$ με $x > 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0, x]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων

και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}-t}\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)' = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}-t}\left(\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}-t} \cdot \frac{t-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

Οπότε από το ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x)$ τέτοιο, ώστε: $\varphi'(\xi) = \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} = \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{x} \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\sqrt{\xi^2+1}+x=0$$

Γ4. Από Γ3 έχουμε ότι $h'(x)<0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $h \searrow \mathbb{R}$.

Για $x \in (0,1)$ είναι $x - x^2 = x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x > x^2$ και $x^3 - x^5 = x^3(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow x^3 > x^5$ οπότε:

$$x > x^2 \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(x^2) \text{ και } x^3 > x^5 \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(x^3) < h(x^5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $h(x)+h(x^3) < h(x^2)+h(x^5)$.

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $\varphi(x) = f'(x) - \ln x,\ x>0$. Είναι $\varphi(x) \neq 0$ και η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έστω ότι $\varphi(x)<0 \Leftrightarrow f'(x) < \ln x$ για κάθε $x>0$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \le \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x \Leftrightarrow f'(0) \le -\infty$ που είναι άτοπο, άρα $f'(x) > \ln x$ για κάθε $x>0$.

Δ2. Επειδή η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0>0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, είναι $f'(x_0)=0$.
Επειδή $f'(x) > \ln x$ για κάθε $x>0$ και $x_0>0$ είναι $f'(x_0) > \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 < 1$, άρα $0 < x_0 < 1$
.

Δ3. Για κάθε $0 < x < x_0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x(\ln x - 1) - 2,\ x \ge 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x) = f'(x) - (\ln x - 1) - x\cdot\dfrac{1}{x} = f'(x) - \ln x$.

Για κάθε x > 1 είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1$ είναι $g(x) > g(1) \Leftrightarrow f(x) - x(\ln x - 1) - 2 > f(1) + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$f(x) > x(\ln x - 1) + 2$.

Δ5. Για κάθε x > 1 είναι $f(x) < f'(x)(x-1)+1 \Leftrightarrow f(x) - 1 < f'(x)(x-1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x)$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,x],\ x>1$, οπότε υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Είναι $1 < \xi < x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x)$