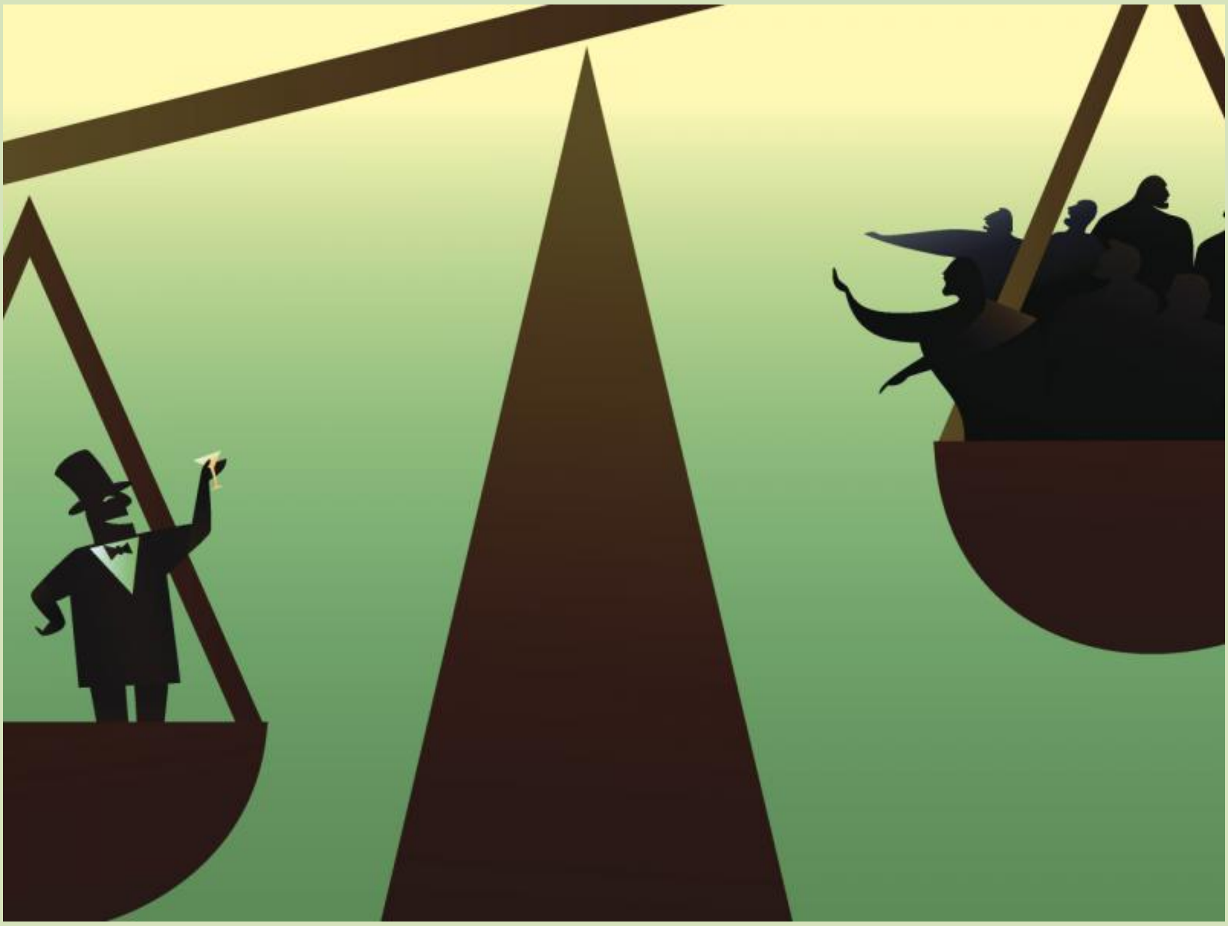
Ανισοτικές σχέσεις ολοκληρωμάτων



Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς

www.Askisopolis.gr

Ανισοτικές σχέσεις ολοκληρωμάτων

Πως αποδεικνύω ότι:

$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$ → Αποδεικνύουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$ → Αποδεικνύουμε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ή αποδεικνύουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

$\gamma \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \delta$ ή $\gamma < \int_\alpha^\beta f(x)dx < \delta$ → Μελετούμε την συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν m η ελάχιστη τιμή της f και M η μέγιστη τιμή της f τότε: $m \leq f(x) \leq M$, οπότε και $\int_\alpha^\beta m dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta M dx \Leftrightarrow$ $m(\beta-\alpha) \leq \int^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \gamma$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \delta$ → Μελετούμε την συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν m η ελάχιστη τιμή της f, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta m dx = m(\beta-\alpha)$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta m dx = m(\beta-\alpha)$ όμοια αν η f έχει μέγιστο M στο $[\alpha,\beta]$.

→ Μελετούμε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα στο $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι κυρτή και $y = \lambda x + \beta$ εφαπτομένη της σε σημείο του $[\alpha,\beta]$,τότε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $f(x) \geq \lambda x + \beta \Rightarrow$ $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta f(\lambda x + \beta)dx = \gamma$. Όμοια αν η f είναι κοίλη.

$\int_\alpha^\beta f(x)dx >$ ή $< \int_\gamma^\delta f(x)dx$ → Βρίσκουμε την μονοτονία της f.. Αν f ↗ τότε για $\alpha \leq x \leq \beta$ είναι $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\alpha)dx < \int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta f(\beta)dx$ (1) και όμοια $\int_\gamma^\delta f(\gamma)dx < \int_\gamma^\delta f(x)dx < \int_\gamma^\delta f(\delta)dx$. Αν $\beta < \gamma$ τότε $\int_\alpha^\beta f(\beta)dx < \int_\gamma^\delta f(\gamma)dx$ οπότε και $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\gamma^\delta f(x)dx$. Όμοια αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

→ Θεωρούμε αρχική συνάρτηση F της f. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την F στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$, $[\gamma,\delta]$. Τότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ και $\xi_2 \in (\gamma,\delta)$ τέτοια, ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και $F'(\xi_2) = \frac{F(\delta)-F(\gamma)}{\delta-\gamma} \Leftrightarrow$ $f(\xi_2) = \frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta f(x)dx$. Αν f ↗ και $\xi_1 < \xi_2$ τότε $f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow \ldots$. Όμοια αν f ↘ .

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

1. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^5 x^e dx < \int_1^5 e^x dx$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $x^e \le e^x \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln e^x \Leftrightarrow e\ln x \le x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$, $x \in [1,5]$.

Θεωρούμε την $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

Είναι $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

x	1	e	5
h'		+	−
h		↗ Ο.Μ	↘

Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και για κάθε $x > e$ είναι $h'(x) < 0$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Η h έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$, άρα $h(x) \le h(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow x^e \le e^x$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = e$, είναι: $\int_1^5 x^e dx < \int_1^5 e^x dx$

2. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) - f(\alpha) \le f'(\beta)(x-\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

β) $2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < f'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta-\alpha)$

Πανελλαδικές 1997

Λύση

α) 1ος τρόπος

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, x]$, $x \in (\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, x): f'(\xi) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $\xi < x < \beta$ και $f' \nearrow [\alpha,\beta]$ είναι $f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < f'(\beta) \Leftrightarrow$

$f(x) - f(\alpha) < f'(\beta)(x-\alpha)$.

Αν $x = \alpha$ ισχύει η ισότητα. Οπότε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $f(x) - f(\alpha) \le f'(\beta)(x-\alpha)$ (1).

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x-\alpha)$, $x \in [\alpha,\beta]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x) = f'(x) - f'(\beta)$.

Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x < \beta \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\beta) \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [\alpha,\beta]$.

Για κάθε $\alpha \le x \le \beta$ είναι $g(x) \ge g(\alpha) \Leftrightarrow f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x-\alpha) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) - f(\alpha) \le f'(\beta)(x-\alpha)$

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha)dx < f'(\beta)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)dx \Leftrightarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - f(\alpha)(\beta-\alpha) < f'(\beta)\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} - \alpha f'(\beta)(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)dx < 2f(\alpha)(\beta-\alpha) + f'(\beta)(\beta^2-\alpha^2) - 2\alpha f'(\beta)(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)dx < 2f(\alpha)(\beta-\alpha) + f'(\beta)(\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\alpha^2) \Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(x)dx < 2f(\alpha)(\beta-\alpha) + f'(\beta)(\beta-\alpha)^2$$

3. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$2f'(2) + f(-2) < \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

Λύση

Αφού η f είναι κοίλη η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Στο διάστημα $[-2,x]$ με $x \in (-2,2]$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f, οπότε υπάρχει $\xi \in (-2,x) : f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$.

Όμως $-2 < \xi < x \le 2$ άρα $\xi < 2$ οπότε $f'(\xi) > f'(2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} > f'(2) \Leftrightarrow$

$$f(x) - f(-2) > f'(2)(x+2) \text{ και} \int_{-2}^{2} f(x)dx - \int_{-2}^{2} f(-2)dx > \int_{-2}^{2} f'(2)(x+2)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx - 4f(-2) > f'(2)\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{2} \Leftrightarrow \int_{-2}^{2} f(x)dx - 4f(-2) > 8f'(2) \Leftrightarrow$$

$$8f'(2) + 4f(-2) < \int_{-2}^{2} f(x)dx \Leftrightarrow 2f'(2) + f(-2) < \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

4. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις g, h, για τις οποίες ισχύει: $\int_3^5 g^2(x)dx = 9$ και $\int_3^5 h^2(x)dx = 25$. Να αποδείξετε ότι: $\int_3^5 h(x)g(x)dx \le 17$.

Λύση

Είναι $(g(x)-h(x))^2 \ge 0 \Leftrightarrow g^2(x) - 2h(x)g(x) + h^2(x) \ge 0$ οπότε

$$\int_3^5 g^2(x)dx - 2\int_3^5 h(x)g(x)dx + \int_3^5 h^2(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow 34 \ge 2\int_3^5 h(x)g(x)dx \Leftrightarrow \int_3^5 h(x)g(x)dx \le 17.$$

$\gamma \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \delta$ ή $\gamma < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \delta$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$2 \le e^2\nu^2 \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx \le e,\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

Λύση

Έστω $f(x) = xe^{-\nu x}$, $x \in \left(\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right)$. Είναι $f'(x) = e^{-\nu x} - \nu xe^{-\nu x} = e^{-\nu x}(1-\nu x)$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και f γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right]$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{\nu}$ το $f\left(\frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu}e^{-\nu\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu e}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_2 = \frac{2}{\nu}$ το $f\left(\frac{2}{\nu}\right) = \frac{2}{\nu e^2}$, επομένως για κάθε $x \in \left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right]$ ισχύει: $\frac{2}{\nu e^2} \le f(x) \le \frac{1}{\nu e}$.

Οπότε και $\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \frac{2}{\nu e^2}dx \le \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x)dx \le \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \frac{1}{\nu e}dx \Leftrightarrow \frac{2}{\nu e^2}\left(\frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu}\right) \le \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx \le \frac{1}{\nu e}\left(\frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow$

$\frac{2}{\nu^2 e^2} \le \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx \le \frac{1}{\nu^2 e} \Leftrightarrow 2 \le \nu^2 e^2 \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx \le e$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx < 1$.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2019

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$.

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \ne 0$ και $x \ne 1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $\int_0^1 2f^2(x)dx < 1 \Leftrightarrow 2\int_0^1 f^2(x)dx < 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx < \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 f(x)dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f^2(x) - f(x)\right]dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\left[f(x) - 1\right]dx < 0$

Για κάθε $0 \le x \le 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) - 1 \le 0 \end{cases}$, άρα

$f(x)(f(x) - 1) \le 0$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, είναι: $\int_0^1 f(x)\left[f(x) - 1\right]dx < 0$

7. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $[1,5]$ με σύνολο τιμών το $[3,10]$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 f(x)dx < \int_1^5 f(x)dx$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι $\int_1^5 f(x)dx = 20$ να αποδείξετε ότι $\int_1^5 f^2(x)dx \le 140$.

Λύση

α) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[3,10]$ θα είναι $3 \le f(x) \le 10$ οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,5]$. Είναι $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx > \int_2^4 f(x)dx$ γιατί αφού $f(x) > 0$ είναι και $\int_1^2 f(x)dx > 0$, $\int_4^5 f(x)dx > 0$

β) Επειδή $3 \le f(x) \le 10$ τότε $\left.\begin{matrix} f(x)-3 \ge 0 \\ f(x)-10 \le 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow [f(x)-3][f(x)-10] \le 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 13f(x) + 30 \le 0$ άρα και $\int_1^5 f^2(x)dx - 13\int_1^5 f(x)dx + 30\int_1^5 dx \le 0 \Leftrightarrow$

$\int_1^5 f^2(x)dx - 13 \cdot 20 + 30 \cdot 4 \le 0 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)dx \le 140$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > \dfrac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

γ) Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e) = e\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2018

Λύση

α) 1ος τρόπος

Έστω $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x,\ x \ge 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1) - x > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \dfrac{x}{x+1}$

2ος τρόπος

Ισχύει το ΘΜΤ για την $g(x) = \ln x$ στο $[1,1+x], x > 0$,οπότε υπάρχει $\theta \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε

$g'(\theta) = \dfrac{g(1+x) - g(1)}{1+x-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\theta} = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Έχουμε $1 < \theta < 1+x \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{\theta} < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{\ln(1+x)}{x} \Leftrightarrow \ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} < 0 \Rightarrow f \searrow (0,+\infty)$ άρα είναι 1-1,οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f(A) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = (0,1) = A_{f^{-1}}$.

γ) 1ος τρόπος

Για κάθε $1 \le x \le e \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(e) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e} \le f(x) \le \ln 2$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1,e]$, είναι:

$$\int_1^e \frac{\ln(e+1)}{e} dx < \int_1^e f(x) dx < \int_1^e \ln 2 dx \Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e}(e-1) < \int_1^e f(x) dx < (e-1)\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(e+1)}{e}(e-1) < F(e) - F(1) < (e-1)\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e}(e-1) - e\ln 2 < -F(1) < (e-1)\ln 2 - e\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(e+1)\cdot(e-1) - e^2\ln 2}{e} < -F(1) < -\ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 < F(1) < \frac{e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e}$$

Αρκεί $\frac{e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e} < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right) \Leftrightarrow \frac{e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e} < (e+1)\ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$

$$e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1) < e(e+1)\ln 2 - e\ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^2\ln 2} - \cancel{e\ln(e+1)} + \ln(e+1) < \cancel{e^2\ln 2} + e\ln 2 - \cancel{e\ln(e+1)} \Leftrightarrow$$

$\frac{\ln(e+1)}{e} < \ln 2 \Leftrightarrow f(e) < f(2) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} e > 2$ ισχύει.

2ος τρόπος

$$\ln(x+1) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx > \int_1^e \frac{1}{x+1} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e f(x) dx > \int_1^e \frac{1}{x+1} dx \Leftrightarrow F(e) - F(1) > \left[\ln(x+1)\right]_1^e \Leftrightarrow e\ln 2 - F(1) > \ln(e+1) - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$e\ln 2 - F(1) > \ln(e+1) - \ln 2 \Leftrightarrow F(1) < \ln 2^e - \ln\frac{e+1}{2} \Leftrightarrow F(1) < \ln\frac{2^e}{\frac{e+1}{2}} \Leftrightarrow F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right).$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα

Για $x > 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow \int_1^e f(x) dx < \int_1^e f(1) dx \Leftrightarrow F(e) - F(1) < f(1)(e-1) \Leftrightarrow$

$e\ln 2 - F(1) < \ln 2(e-1) \Leftrightarrow \cancel{e\ln 2} - F(1) < \cancel{e\ln 2} - \ln 2 \Leftrightarrow F(1) > \ln 2$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0 \end{cases}$ **. Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:**

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι: $\pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)dx<\dfrac{3\pi}{2}-1$.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2017

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι συνεχής στο $x=0$.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha\right)=-1+\alpha$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow-1+\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=3$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[0,2]$. Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[2,+\infty)$.

Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ είναι $f'(x)=-\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$.

Έστω $h(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$. Είναι $h'(x)=-x\eta\mu x$.

Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ είναι $\eta\mu x<0$ άρα $h'(x)>0\Rightarrow h\searrow\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)>h(0)=0$ άρα $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$.

γ) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3-3x^2+2\right)dx=$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right]_0^2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+4-8+4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx$$

Είναι $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\ge f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow2\le f(x)\le3-\dfrac{2}{\pi}$ Και επειδή υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες δεν ισχύει η ισότητα, είναι:

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3-\dfrac{2}{\pi}\right)dx\Leftrightarrow2\cdot\dfrac{\pi}{2}<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\dfrac{\pi}{2}\left(3-\dfrac{2}{\pi}\right)\Leftrightarrow\ \pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\dfrac{3\pi}{2}-1$

10. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℝ, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι: $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ **για κάθε και** $x\in\mathbb{R}$**,** $f(0)=0,\ f'(0)=1$ **.**

α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο ℝ.

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ.

γ) Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$ **.**

Πανελλαδικές 2016

Λύση

α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο ℝ σύμφωνα με το θ.Fermat, ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, οι συναρτήσεις $e^{f(x)}+x$ και $f\left(f(x)\right)+e^x$ είναι παραγωγίσιμες, ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$$\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f\left(f(x)\right)+e^x\right)'\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)f'(x)+e^x$$

Για $x=x_0$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$e^{f(x_0)}\cancel{f'(x_0)}^{0}+1=f'\left(f(x_0)\right)\cancel{f'(x_0)}^{0}+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0 \text{ άτοπο αφού } f'(0)=1\neq 0 .$$

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο ℝ.

β) Επειδή $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο ℝ.

Επειδή επιπλέον $f'(0)=1>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

γ) 1ος τρόπος

Έστω $\ln x=u$ τότε $\frac{1}{x}dx=du$. Για $x=1$ είναι $u=0$ και για $x=e^\pi$ είναι $u=\pi$.

Είναι $\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^\pi f(u)du$.

Είναι $0\le x\le\pi\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\pi$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[0,\pi]$, έχουμε: $\int_0^\pi 0dx<\int_0^\pi f(x)dx<\int_0^\pi \pi dx\Leftrightarrow 0<\int_0^\pi f(x)dx<\pi^2$.

2ος τρόπος

Είναι $1\le x\le e^\pi\Leftrightarrow 0\le\ln x\le\ln e^\pi\Leftrightarrow f(0)\le f(\ln x)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(\ln x)\le\pi\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$0\le\frac{f(\ln x)}{x}\le\frac{\pi}{x}$. Επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in\left[1,e^\pi\right]$ έχουμε:

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi\int_1^{e^\pi}\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi\left[\ln x\right]_1^{e^\pi}\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$$

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \gamma$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \delta$

11.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x-\alpha x-1$, $\alpha, x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη τιμή της παραμέτρου α , αν είναι γνωστό ότι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2^{x^2}dx > 1+\frac{\ln 2}{3}$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $f(0)=2^0-\alpha\cdot 0-1=0$, οπότε: $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge f(0)$.

Δηλαδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2^x\ln 2-\alpha$, λόγω του θεωρήματος Fermat, ισχύει: $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln 2-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\ln 2$.

β) Για $\alpha=\ln 2$ είναι: $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2^x-x\ln 2-1\ge 0 \Leftrightarrow 2^x\ge x\ln 2+1,\ \ x\in\mathbb{R}$

Αντικαθιστώντας όπου x το x^2 προκύπτει: $2^{x^2}\ge x^2\ln 2+1$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, είναι: $\int_0^1 2^{x^2}dx > \int_0^1 (x^2\ln 2+1)dx \Leftrightarrow \int_0^1 2^{x^2}dx > \ln 2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 dx=\ln 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+1=\frac{1}{3}\ln 2+1$.

12.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

β) Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$$

Πανελλαδικές 2018

Λύση

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$

Είναι $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2\ge 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}\ge 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}\ge 1 \Leftrightarrow x-\alpha\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\alpha$

Για κάθε $x<\alpha$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$ και για κάθε $x>\alpha$ είναι $f''(x)>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))\equiv(\alpha, 2-\alpha^2)$

β) Για $\alpha=2$ είναι $f(x)=2e^{x-2}-x^2$.

Είναι $f(2)=-2$ και $f'(2)=-2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=2$ έχει εξίσωση:

$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+2$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$ δηλαδή στο $[2,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός από το σημείο επαφής, άρα $f(x)\ge -2x+2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$. Επειδή $\sqrt{x-2}\ge 0$, είναι $f(x)\sqrt{x-2}\ge(-2x+2)\sqrt{x-2}$ οπότε και

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$ (2)

Θέτουμε $x-2=u \Leftrightarrow x=u+2 \Rightarrow dx=du$

Για $x=2$ είναι $u=0$ και για $x=3$ είναι $u=1$, οπότε

$$\int_0^1 \left(-2(u+2)+2\right)\sqrt{u}du = \int_0^1 \left(-2u\cdot u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)du = -2\int_0^1 \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du =$$

$$= -2\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -2\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right) = -2\cdot\frac{16}{15} = -\frac{32}{15} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει ότι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$

$2^{ος}$ τρόπος

$$\int_2^3 \left(2e^{x-2} - x^2\right)\sqrt{x-2}dx = \int_2^3 2e^{x-2}\sqrt{x-2}dx - \int_2^3 x^2\sqrt{x-2}dx \overset{u=\sqrt{x-2}}{=}$$

$$\int_0^1 4e^{u^2}u^2du - \int_0^1 \left(u^2+2\right)^2\cdot 2u^2du = \int_0^1 4e^{u^2}u^2du - 2\int_0^1 \left(u^6+4u^4+4u^2\right)du =$$

$$\int_0^1 4e^{u^2}u^2du - 2\left[\frac{u^7}{7} + 4\frac{u^5}{5} + 4\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \int_0^1 4e^{u^2}u^2du - 2\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\right) =$$

$$\int_0^1 4e^{u^2}u^2du - \frac{478}{105} \geq \int_0^1 \left(4u^2+4\right)du - \frac{478}{105} = \left[\frac{4u^3+4u}{3}\right]_0^1 - \frac{478}{105} = \frac{8}{3} - \frac{478}{105} = -\frac{198}{105} > -\frac{32}{15}$$

$\left(-\frac{198}{7} > -32 \Leftrightarrow 198 < 224\right.$ ισχύει)

13.Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

- **$f''(x) - xf'(x) > f(x)$ για κάθε $x > 0$**
- **$f(0) = f'(0) = 0$**
- **$f(1) = 2$**

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) \geq xf(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

β) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0,+\infty)$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

ε) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 4$

στ) $4 < \int_0^2 f(x)dx < 2f(2)$

ζ) $\int_0^1 xf^2(x)dx < 2$

η) $\int_0^1 \left(x^2+1\right)f(x)dx < 2$

Λύση

α) Έστω $g(x) = f'(x) - xf(x),\ x \geq 0$. Είναι

$g'(x) = f''(x) - f(x) - xf'(x) > f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow g \nearrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq xf(x)$.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) > xf(x) \Leftrightarrow f'(x) - xf(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}f'(x) - e^{-\frac{x^2}{2}}xf(x) > 0 \Leftrightarrow \left(e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)\right)' > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}f(x),\ x\geq 0$. Είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x\geq 0$ είναι $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 0$.

γ) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>xf(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.
Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)-xf'(x)>f(x)\Leftrightarrow f''(x)>xf'(x)+f(x)>0\Rightarrow f\cup[0,+\infty)$.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=f'(1)(x-1)+2$
Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\geq f'(1)(x-1)+2$ (1)
Είναι $f'(1)>f(1)=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(1)(x-1)+2]=+\infty$, οπότε από την (1) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>xf(x)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}[xf(x)]=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

ε) Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχουν $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\ x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow f'(x_1)=2f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ και } f'(x_2)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=2\left(2-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=4-2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Είναι $f'(x_1)+f'(x_2)=2f\left(\frac{1}{2}\right)+4-2f\left(\frac{1}{2}\right)=4$.

στ) Επειδή στη σχέση $f(x)\geq f'(1)(x-1)+2$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, έχουμε:

$$\int_0^2 f(x)dx>\int_0^2[f'(1)(x-1)+2]dx\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx>\left[f'(1)\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+2x\right]_0^2\Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx>f'(1)(2-2)+4=4$$

Για κάθε $0\leq x\leq 2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)\leq f(2)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$, είναι:

$$\int_0^2 f(x)dx<\int_0^2 f(2)dx=f(2)(2-0)\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx<2f(2)$$

ζ) 1ος τρόπος
Επειδή για κάθε $x\geq 0$ είναι $f'(x)\geq xf(x)$ και $f(x)\geq 0$, ισχύει ότι $f(x)f'(x)\geq xf^2(x)$.
Επειδή στη τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, έχουμε:

$$\int_0^1 xf^2(x)dx<\int_0^1 f(x)f'(x)dx\Leftrightarrow\int_0^1 xf^2(x)dx<\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_0^1=\frac{f^2(1)}{2}=2$$

2ος τρόπος
Για κάθε $0\leq x\leq 1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)\leq f(1)=2\Leftrightarrow f^2(x)\leq 4\Leftrightarrow xf^2(x)\leq 4x$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, είναι: $\int_0^1 xf^2(x)dx<\int_0^1 4xdx\Leftrightarrow\int_0^1 xf^2(x)dx<\left[2x^2\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 xf^2(x)dx<2$

η) $\int_0^1(x^2+1)f(x)dx<2\Leftrightarrow\int_0^1 x^2f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx<2$
Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f'(x)\geq xf(x)\Leftrightarrow x^2f(x)\leq xf'(x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$

έχουμε: $\int_0^1 x^2 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f(x)dx < \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 x^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx < f(1) = 2$

14.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x,\ x \in [0,\pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - 1 - \pi$.

Πανελλαδικές 2017

Λύση

α) Έστω $M(\alpha, f(\alpha))$, το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τότε $(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$ και $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ σημείο της (ε) άρα

$-\frac{\pi}{2} - (-\eta\mu\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\alpha$, αφού $f'(\alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση λ, με $\lambda(\alpha) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{\pi}{2} + \eta\mu\alpha$, $\alpha \in [0,\pi]$.

Είναι $\lambda(0) = 0$ και $\lambda(\pi) = 0$, όμως η λ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με:

$\lambda'(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\alpha$

$\lambda'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\alpha \geq 0 \overset{\eta\mu\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha - \frac{\pi}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{\pi}{2}$

Για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\lambda'(\alpha) < 0 \Rightarrow \lambda$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $\lambda'(\alpha) > 0 \Rightarrow \lambda$ γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Οπότε η $\alpha = 0$ μοναδική ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και η $\alpha = \pi$ μοναδική ρίζα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Για $\alpha = 0$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(\varepsilon_1): y = -x$ και

για $\alpha = \pi$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(\varepsilon_2): y = x - \pi$

β) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[0,\pi]$ εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x) > x - \pi \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x},\ x \in (0,\pi)$ άρα

$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)dx = \left[x - \pi \ln x\right]_1^e = e - 1 - \pi$

15.Έστω συνάρτηση f κυρτή στο $[0,1]$. Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{2}f'(0) + f(0) < \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}f'(1) + f(0)$$

Λύση

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση: $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=f'(0)x+f(0)$.
Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\ge f'(0)x+f(0)$ για κάθε $x\in[0,1]$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, είναι

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(f'(0)x+f(0)\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>f'(0)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+f(0)=\frac{1}{2}f'(0)+f(0)$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,x]$, $x\in(0,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Είναι

$$0<\xi<x\le 1 \overset{f\cup \Leftrightarrow f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(1)\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x}<f'(1)\Leftrightarrow f(x)<xf'(1)+f(0) .$$

Επειδή για $x=0$ είναι $f(0)=0\cdot f'(1)+f(0)$, τελικά είναι $f(x)\le xf'(1)+f(0)$ για κάθε $x\in[0,1]$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, έχουμε:

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\left(xf'(1)+f(0)\right)dx=\frac{1}{2}f'(1)+f(0)$$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx > ή < \int_\gamma^\delta f(x)dx$

16.Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx>\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$$

Λύση

1ος τρόπος

Είναι $\alpha\le x\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)\le f(x)\le f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$,

ισχύει ότι: $\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx<\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx\Leftrightarrow \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx<f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ (1)

Είναι $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\le x\le\beta\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\le f(x)\le f(\beta)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$,

ισχύει ότι: $\displaystyle\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx>\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx\Leftrightarrow \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx>f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ (2)

Από (1),(2) προκύπτει ότι $\displaystyle\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx>\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$.

2ος τρόπος

Αν F αρχική συνάρτηση της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx>\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\Leftrightarrow F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha).$$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $F'(x)=f(x)$, οπότε είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε $F'(\xi_1)=\dfrac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\dfrac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και

$$F'(\xi_2)=\frac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\frac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\xi_1)<f(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\dfrac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$

$$F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)$$

17.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β) Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

γ) Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$, να αποδείξετε ότι $(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2)$ για κάθε $x>1$.

Επαναληπτικές πανελλαδικές 2016

Λύση

α) Για κάθε $x\in(0,1)$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=1 \text{ και } \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$, η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, οπότε είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln x}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{x}+1\right)=-\infty$, άρα η ευθεία $x=0$ δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β) Για κάθε $x\in(0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x<1\Leftrightarrow\ln x<\ln1=0<1\Leftrightarrow1-\ln x>0\Leftrightarrow f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.

Για κάθε $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)^2}$.

Έστω $h(x)=x-1-x\ln x,\ x\geq 1$. Είναι $h'(x)=1-\ln x-\cancel{x}\dfrac{1}{\cancel{x}}=-\ln x<0$ για κάθε $x>1$, άρα η h

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Για κάθε $x>1\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(x)<h(1)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{\ln x}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x}{x^2-x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x-1}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1-x}{x}}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-\cancel{(x-1)}}{2x\cancel{(x-1)}}=-\dfrac{1}{2}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=1$.

Επειδή κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της f' καθώς και τα εσωτερικά σημεία του $(0,+\infty)$ στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη, το $x_1=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

γ) 1ος τρόπος

Για κάθε $x>1$ είναι $x^2-x=x(x-1)>0\Leftrightarrow x^2>x$.

Η F είναι συνεχής στα $[1,x],\left[x,x^2\right]$, $x>1$ γιατί είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$, και παραγωγίσιμη στα $(1,x)$ και $\left(x,x^2\right)$ με $F'(x)=f(x)$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in(1,x)$ και $\xi_2\in\left(x,x^2\right)$ τέτοια, ώστε $F'(\xi_1)=\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}$ και

$F'(\xi_2)=\dfrac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\dfrac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)}$.

Είναι $1<\xi_1<x<\xi_2<x^2\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(\xi_1)>f(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{F(x)-F(1)}{\cancel{x-1}}>\dfrac{F(x^2)-F(x)}{x\cancel{(x-1)}}\Leftrightarrow$

$xF(x)-xF(1)>F(x^2)-F(x)\Leftrightarrow xF(x)+F(x)>F(x^2)+xF(1)\Leftrightarrow(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2)$

2**ος τρόπος**:

$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2)\Leftrightarrow xF(x)+F(x)>F(x^2)+xF(1)\Leftrightarrow$

$xF(x)-xF(1)>F(x^2)-F(x)\Leftrightarrow x\int_1^x f(t)dt>\int_x^{x^2}f(t)dt$

Για κάθε $1\leq t\leq x\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(1)\geq f(t)\geq f(x)\Leftrightarrow f(x)\leq f(t)\leq 1$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t\in[1,x]$, $x>1$ έχουμε: $\int_1^x f(x)dt<\int_1^x f(t)dt<\int_1^x 1dt\Leftrightarrow f(x)(x-1)<\int_1^x f(t)dt<x-1\Leftrightarrow$

$f(x)\left(x^2-x\right)<x\int_1^x f(t)dt<x^2-x\quad(1)$

Για κάθε $x\leq t\leq x^2\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)\geq f(t)\geq f(x^2)\Leftrightarrow f(x^2)\leq f(t)\leq f(x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t\in\left[x,x^2\right]$, $x>1$ έχουμε:

$\int_x^{x^2}f(x^2)dt<\int_x^{x^2}f(t)dt<\int_x^{x^2}f(x)dt\Leftrightarrow f(x^2)\left(x^2-x\right)<\int_x^{x^2}f(t)dt<\left(x^2-x\right)f(x)\quad(2)$

Για κάθε $x \geq 1$ είναι $x^2 - x \geq 0$ και επειδή $0 < f(x) \leq 1$, είναι $\left(x^2 - x\right)f(x) \leq x^2 - x$ (3)

Από τις (1), (2) έχουμε $x\int_1^x f(t)dt > \left(x^2 - x\right)f(x) > \int_x^{x^2} f(t)dt$