ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr, Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr Site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2011

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν ***ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ,*** τα οποία θα **ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα** που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα,** αφού πρώτα στα παραρτήματα , εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. **Ο «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»** θα διενεργηθεί στις **21 Ιανουαρίου 2012** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών **«ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** θα γίνει στις **3 Μαρτίου 2012** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην **29^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Τουρκία, Μάιος 2012),** στην **16^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Ιούνιος 2012)** και στην **53^{η} Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αργεντινή, Ιούλιος 2012).**
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
11. **Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και να την παραδώσει στους επιτηρητές.**

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος
Γρηγόριος Καλογερόπουλος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ο Γενικός Γραμματέας
Εμμανουήλ Κρητικός
Λέκτορας Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right).$$

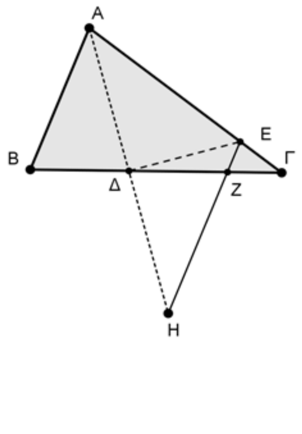
Πρόβλημα 2
Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\dfrac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Πρόβλημα 3
Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^{\circ}$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^{0}$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

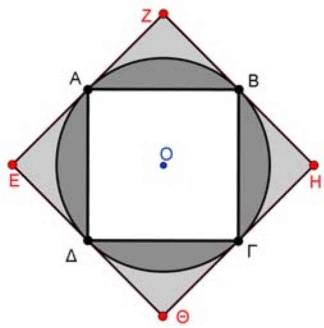
$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \qquad \text{και} \qquad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x .$$

Πρόβλημα 3
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3{,}1415$).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)}$$

Πρόβλημα 3
(α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa(x+2)-\frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq \pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2},$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O,R})$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $c(\mathrm{O,R})$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\Gamma\mathrm{NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω K, των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση
$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$,, αν το σύστημα
$$\left\{\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda, \qquad 2x-y=-\lambda\right\} \qquad (\Sigma)$$
έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3
Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\le 8\cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία $\mathrm{A,I,\Lambda,M}$ και $\mathrm{A,I,K,N}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Αν η $\mathrm{A\Delta}$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ που αντιστοιχεί στη κορυφή A, τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\text{ν}}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{2-\frac{1}{5}}:\dfrac{2-\frac{2}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{9}{5}}:\dfrac{2-1}{9}=\dfrac{10}{9}:\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{5-\frac{1}{5}}:\dfrac{5-\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{24}{5}}:\dfrac{\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{10}{24}:\dfrac{5}{18}=\dfrac{10}{24}\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{180}{120}=\dfrac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7\,.$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}=20^0$.

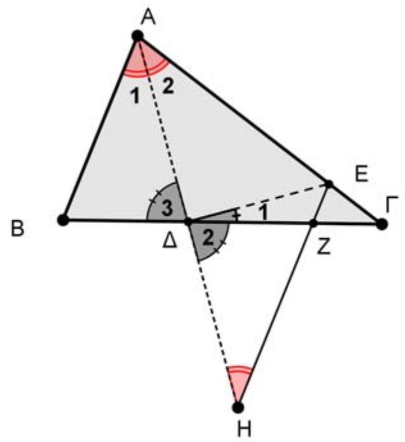
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$, θα ισχύει: $\hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Α}}_2=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Η}}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{\text{Α}}_2=\hat{\text{Η}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΗ}$ και $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$



Σχήμα 1

2. Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}\text{Ε}=\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{\text{Ε}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\hat{\Delta}_3\,.$$

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}+\hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{\text{Ε}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}+\frac{\hat{\text{Β}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{20^\text{o}}{2}=10^\text{o}\,.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση
Έχουμε:

$$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2, \beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2 \text{ και } \gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2.$$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4}\right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^2\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^2\right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^4} = \frac{1}{4 \cdot 10000} = \frac{1}{40000}$$

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x.$$

Λύση
Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \le 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \le 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \le 8 \Leftrightarrow x \le 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \le 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \le 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \le 8x \Leftrightarrow 3 \le 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \le x \le 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon)\,||\,(\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4.$$

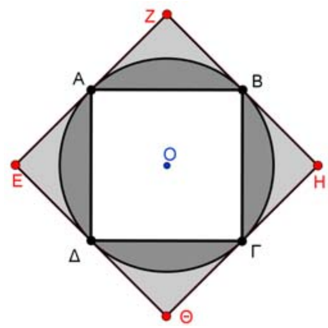
(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε). Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4



Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.

(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

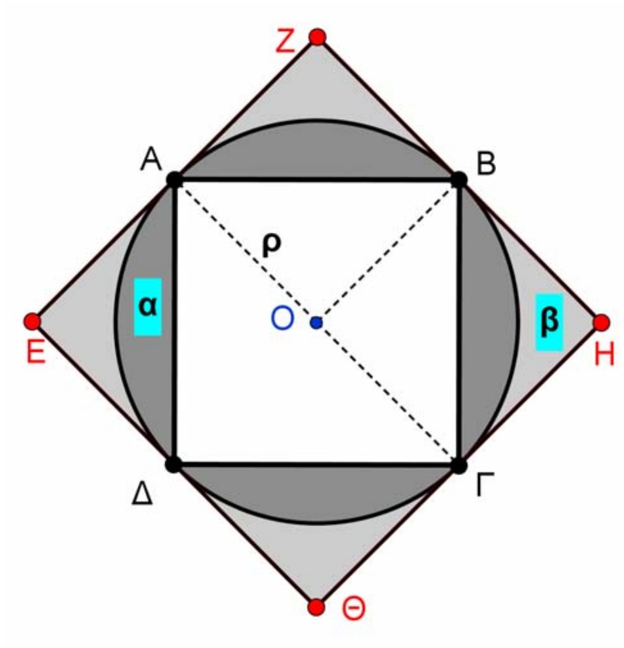
Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp\mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $ΟΑ \perp ΕΖ$ και $ΟΓ \perp ΗΘ$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(Ο,\rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΖΗ = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428...., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x-10)(x^2-7x+10) = 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} + \dfrac{2x-1}{5} < \dfrac{x(x+1)}{2} \end{array} \right\}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)(x^2-7x+10) = 0 \Leftrightarrow x-10 = 0 \text{ ή } x^2-7x+10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha = 1,\ \beta = -7,$ $\gamma = 10$, οπότε είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x = 2$ ή $x = 5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2}\Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x\Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2}=\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=x^2+x+1-(x+1)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa(x+2)-\frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa(x+2)-3(\kappa x-1)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$

$$\Leftrightarrow(\kappa+1)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa = -1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = -5$ και είναι αδύνατη.

2. Αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{8\kappa + 3}{\kappa + 1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x = \frac{8\kappa+3}{\kappa+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8(\kappa+1)-5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z}$$

$$x = 8 - \frac{5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \kappa+1 \in \{-1, 1, -5, 5\} \Leftrightarrow \kappa \in \{-2, 0, -6, 4\}.$$

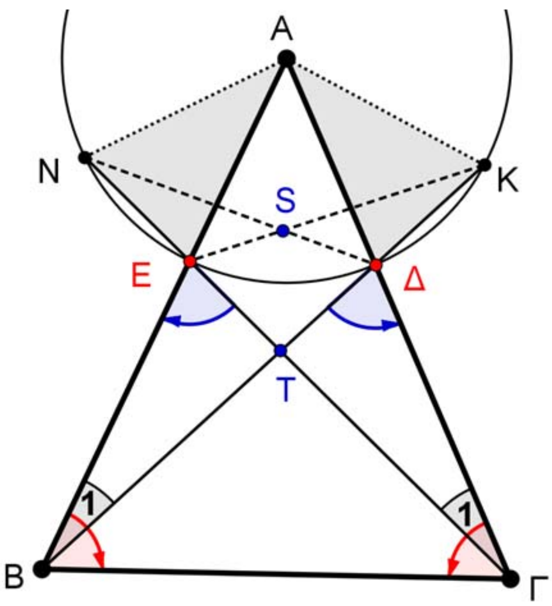
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho < \mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές AB και $\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία E και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες $\mathrm{B}\Delta$, $\Gamma\mathrm{E}$ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K, N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B}\Delta$, $\Gamma\mathrm{E}$ και S το σημείο τομής των $\Delta\mathrm{N}$, EK, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{B\hat{T}\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{T}}\mathrm{B}. \qquad (1)$$

- $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών
$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma \qquad (2)$$
- $$\Delta\mathrm{B}=\Delta\Gamma . \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $\mathrm{B}\hat{\mathrm{T}}\Gamma=\Gamma\hat{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $\mathrm{BT}\Gamma$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $\mathrm{B}\Gamma$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{BT}\Gamma$ έχουμε: $\mathrm{TB}=\mathrm{T}\Gamma$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $\mathrm{TE}=\mathrm{T}\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $\mathrm{A}\Delta\mathrm{K}$ και AEN. Άρα $\Delta\mathrm{K}=\mathrm{EN}$ και επειδή $\mathrm{TE}=\mathrm{T}\Delta$, καταλήγουμε $\mathrm{TK}=\mathrm{TN}$.

Από τις ισότητες $\mathrm{TE}=\mathrm{T}\Delta$ και $\mathrm{TK}=\mathrm{TN}$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων ETK και $\Delta\mathrm{TN}$.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $\mathrm{SEN}=\mathrm{S}\Delta\mathrm{K}$ και στη συνέχεια η ισότητα $\mathrm{SAE}=\mathrm{SAK}$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:
$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}.$$
(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:
$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}.$$
χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:
$$\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}=\frac{(x+2)\left(2x^2-3x+1\right)+x-4}{x^2-2}$$
$$=\frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2}=\frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$
$$=\frac{2x\left(x^2-2\right)+x^2-2}{x^2-2}=\frac{\left(x^2-2\right)(2x+1)}{x^2-2}=2x+1.$$

(β) Για $x=2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:
$$\mathrm{A}=\mathrm{K}(2010)=2\cdot 2010+1=4021.$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$
με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R},\ c\neq 0$.

Λύση

Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.

Έστω $a\neq b.$ Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b)=c^2(x-a+x-b),\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(a+b+2c^2\right)x+ab+(a+b)c^2=0,\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=\left(a+b+2c^2\right)^2-4ab-4(a+b)c^2=(a+b)^2-4ab+4c^4=(a-b)^2+4c^4>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2}. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b)=c^2(a-a+x-b)\Leftrightarrow 0=c^2(a-b)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c\neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a\neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x=b$. Επομένως, για $a\neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y-z=(x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right) \qquad (1)$$

$$z-x=(y-z)\left(y^2+yz+z^2+2\right) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2+xy+y^2+2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+2>0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2+yz+z^2+2=\left(y+\dfrac{z}{2}\right)^2+\dfrac{3z^2}{4}+2>0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x>y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y>z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z>x$.

Έτσι έχουμε $x>y>z>x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x<y$. Επομένως έχουμε $x=y,$ οπότε θα είναι και $y=z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x=x^3+2x-2\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow x^3-1+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1,$$

αφού το τριώνυμο x^2+x+2 έχει διακρίνουσα $\Delta=-7<0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ$<$ΑΓ$<$ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο c(O,R) στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

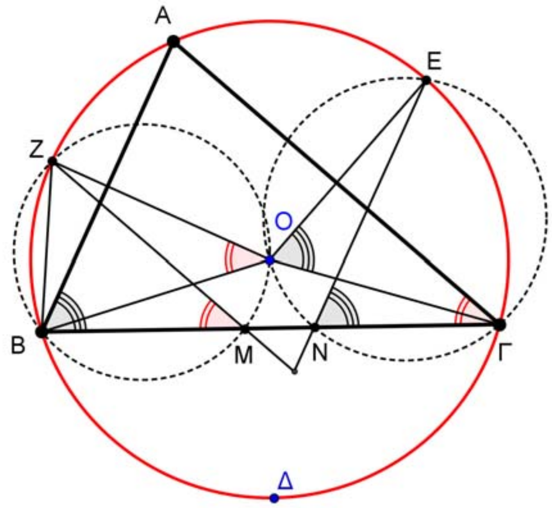
α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Λύση

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, θα ισχύει: $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{Z\hat{O}B}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $\mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο BMOZ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $\mathrm{E\hat{N}\Gamma} = \mathrm{E\hat{O}\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}$ και ότι το τετράπλευρο $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμο.

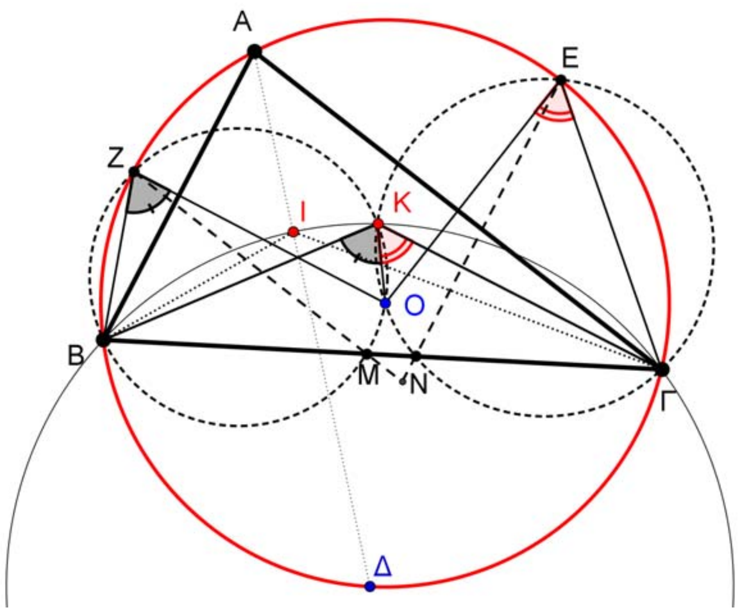
β) Επειδή το σημείο I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}}{2} \text{ και } \Delta\hat{\mathrm{I}}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{I} = \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta\mathrm{B} = \Delta\mathrm{I} = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $\mathrm{B\hat{I}\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία $\mathrm{B, I, K, \Gamma}$ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$\mathrm{B\hat{K}\Gamma} = \hat{\mathrm{A}} + \frac{\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}}{2} = \mathrm{B\hat{I}\Gamma}.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OB}=\mathrm{OZ}=R)$, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}=\hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}=90^{\circ}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OE}=R)$, με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^{o}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}+\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}+\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^{o}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}+90^{o}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$
$$=180^{o}-\left(90^{\circ}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right)=90^{\circ}+\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα x^2+3x+2 και x^2+x-2 έχουν παράγοντα το $x+2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+2\right)^4\left[\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^4=0 \text{ ή } \left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4+12x^2-14=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4+6x^2-7=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2=1 \text{ ή } x^2=-7 \text{ (αδύνατη)}$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

$2^{ος}$ τρόπος

Αν θέσουμε $a = x^2 + 3x + 2,\ b = x^2 + x - 2$, τότε $a - b = 2x + 4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$
\begin{aligned}
a^4 + b^4 = (a-b)^4 &\Leftrightarrow a^4 + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
&\Leftrightarrow -ab\left(2a^2 - 3ab + 2b^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0,
\end{aligned}
$$

αφού η εξίσωση $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$, αν $ab \neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2 - 3u + 2 = 0,\ u = \frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x + 2 = x^2 + x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = -2 \,(\text{διπλή}) \\
&\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \,(\text{με πολλαπλότητα } 4)
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$,, αν το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\left(x^2 + y^2\right) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{matrix}\right\}, \qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\left(x^2 + y^2\right) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha\left(x^2 + (2x+\lambda)^2\right) + 2x + 2x + \lambda = \lambda \\ y = 2x + \lambda \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 5\alpha x^2 + 4(\alpha\lambda + 1)x + \alpha\lambda^2 = 0 & (1) \\ y = 2x + \lambda & (2) \end{matrix}\right\}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16(\alpha\lambda + 1)^2 - 20\alpha^2\lambda^2 = 4\left(-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 \geq 0. \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 80\alpha^2 > 0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2 = -\dfrac{4}{\alpha^2} < 0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 < 0$, για $\lambda < \lambda_1$ ή $\lambda > \lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha = 0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x = 0$, οπότε προκύπτει ότι $y = \lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (0, \lambda)$. Άρα είναι $\alpha = 0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n = a_n - a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = a_1 - a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0, ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n > 10^3$ και $S_{n+1} \leq 8\cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1 = \omega,\ d_n = d_1 + (n-1)\omega = n\omega, n = 2,3,\dots.$$

οπότε θα είναι:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \omega + 2\omega + \dots + n\omega = a_n - a_0 \Leftrightarrow a_n = a_0 + (1+2+\dots+n)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (n+1)a_0 + \left(\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \dots + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\left(1^2+1\right) + \left(2^2+2\right) + \dots + \left(n^2+n\right)\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, τότε έχουμε $\omega = 6$ και

$$a_n = 1 + 3n(n+1),\ S_{n+1} = n+1+n(n+1)(n+2) = (n+1)\left[1+n(n+2)\right] = (n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n > 10^3 \text{ και } S_{n+1} \leq 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n = 1+3n(n+1) > 10^3,\ S_{n+1} = (n+1)^3 \leq 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$

$$n(n+1) > 333,\ n+1 \leq 2\cdot 10 \Leftrightarrow n > 18,\ n \leq 19 \Leftrightarrow n = 18 \text{ ή } n = 19.$$

αφού είναι $17\cdot 18 = 306,\ 18\cdot 19 = 342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

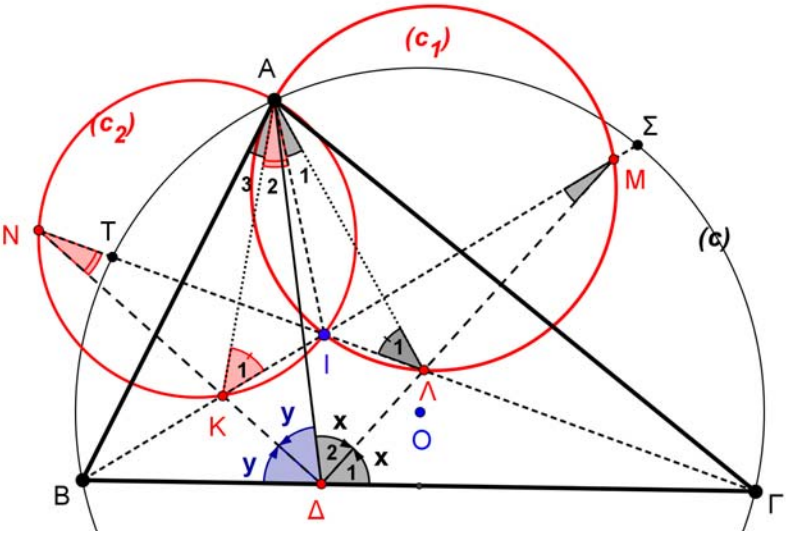
α) Τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{I}, \Lambda, \mathrm{M}$ και $\mathrm{A}, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.

β) Αν η $\mathrm{A}\Delta$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, που αντιστοιχεί στη κορυφή A τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία K, Λ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$ και $\mathrm{A}\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.
Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}}_1 = \mathrm{I}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \Lambda\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{x} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{x} = \hat{x} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $\mathrm{M}\Delta\mathrm{B}$ έχουμε: $\hat{x} = \hat{\mathrm{M}} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{M}} = \hat{x} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, δηλαδή $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{M}} = \hat{x} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$.
Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{AI}\Lambda\mathrm{M}$ είναι εγγράψιμο.
Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}}_2 = \mathrm{I}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} - \mathrm{K}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{y} - \hat{\mathrm{B}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - 90^o + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{N}\Delta\Gamma$ έχουμε: $\hat{y} = \hat{\mathrm{N}} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{N}} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{N}} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.
Άρα το τετράπλευρο AIKN είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}}{2} = 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = \hat{\mathrm{B}} + \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma}}{2} = 90^o + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}.$$

Από το τρίγωνο AIK έχουμε:

$$\hat{\mathrm{K}}_1 = 180^o - \mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} - \hat{\mathrm{A}}_2 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\mathrm{N}} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \hat{y}\,.$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{AI\Lambda}$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^o - \mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}\Gamma - \hat{\mathrm{A}}_1 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} - \hat{\mathrm{M}} = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 90^o - \hat{x}\,.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$ τότε $\hat{x} = \hat{y} = 45^o$, οπότε $\hat{\mathrm{K}}_1 = \hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{\mathrm{K}}_1, \hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή AI).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην $\Sigma\mathrm{T}$.

β) Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\Delta\mathrm{KI\Lambda MN}$.