5ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2016

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι: η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$.

β) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε μπορεί να υπάρχει $x_0\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

γ) Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$

δ) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

ε) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ, τότε $f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow f(x)=\pm g(x)$.

μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x-2\eta\mu x+\beta, & x<0\\ 1, & x=0\\ \alpha\eta\mu x-\beta x+1, & x>0\end{cases}$.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

μονάδες 5

Έστω $\alpha=\beta=1$.

Β2. Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi,\pi]$, όμως υπάρχει σημείο της C_f στο διάστημα αυτό που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού.

μονάδες 4

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(-\pi,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

μονάδες 3

Β4. Να βρείτε διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq(-\pi,\pi)$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

μονάδες 5

Β5. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

μονάδες 4

Β6. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $ημx_0 = x_0 - 2017$.

μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$, $f'(0) < f(1) - f(0)$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε:

Γ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{xg(x)}$.

μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$. μονάδες 5

Γ5. Έστω F αρχική της f. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E(\Omega) = e - \dfrac{5}{2}$ τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $F(\xi) = F(0) + 2$.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$f'(x)(1-2\ln x) + xf''(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$, $f(1) = 1$ και $f'(1) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\ln^2 x}$. μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε τους $α,β,\in(0,+\infty)$, $γ \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει ότι $α^{\ln α} + β^{\ln β} = 2 - γ^2$.

μονάδες 6

Δ4. Έστω $g(x) = \ln f(x)$, $x > 1$

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = e$ και την ευθεία $x = e^2$. μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{g^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$. μονάδες 5

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Α3. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα είναι και συνεχής σ΄ αυτό, δηλαδή:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} (2\alpha x - 2\eta\mu x + \beta) = \lim_{x \to 0^+} (\alpha\eta\mu x - \beta x + 1) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\alpha x - 2\eta\mu x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(2\alpha - 2\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2\alpha - 2,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha\eta\mu x - x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\alpha\frac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = \alpha - 1$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$, πρέπει

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 = \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Β2. Είναι $f(x) = \begin{cases} 2x - 2\eta\mu x + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \eta\mu x - x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

$f(-\pi) = -2\pi - 2\eta\mu(-\pi) + 1 = 1 - 2\pi$, $f(\pi) = \eta\mu\pi - \pi + 1 = 1 - \pi$. Επειδή $f(-\pi) \neq f(\pi)$ δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi, \pi]$. Επειδή $f'(0) = 0$ ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος στο $x_0 = 0$.

Β3. Επειδή $f(-\pi)f(0) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Β4. Είναι $f(0)f(\pi) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.
Επειδή $f(x_1) = f(x_2)$ και η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2] \subseteq (-\pi, \pi)$.

Β5. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 2 - 2\sigma\upsilon\nu x = 2(1 - \sigma\upsilon\nu x)$.
Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}_-$ και η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$.
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}_+$ και η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x - \eta\mu x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{x}\right)\right] = -\infty$ γιατί για $x \neq 0$ είναι

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \leq \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$. Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-x} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\eta\mu x - x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)\right] = -\infty$ γιατί από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών: $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 1]$.
Στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών: $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 1]$.
Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]$.

Β6. $\eta\mu x_0 = x_0 - 2017 \Leftrightarrow \eta\mu x_0 - x_0 = -2017 \Leftrightarrow \eta\mu x_0 - x_0 + 1 = -2016 \Leftrightarrow f(x_0) = -2016$
Επειδή $-2016 \in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0 = x_0 - 2017$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x},\ x \neq 0$ με $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1 + f(0)$. Τότε $f(x) = xh(x)$ και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(xh(x)) = 0$
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Τότε $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) = 1$
Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η ευθεία ε: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$

Γ2. Επειδή $f''(x) \neq 0$ και η f'' είναι συνεχής (αφού είναι 3 φορές παραγωγίσιμη), διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε η f' είναι γνησίως μονότονη.

Από το θεώρημα Μέσης Τιμής για την f , υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$. Είναι $f'(0)<f(1)-f(0)\Leftrightarrow f'(0)<f'(\xi)$.

Επειδή $0<\xi<1$, $f'(0)<f'(\xi)$ και η f' είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως αύξουσα, άρα η f είναι κυρτή.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων

Γ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-1$.

Για κάθε $x<0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(0)=1\Leftrightarrow f'(x)-1<0\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$.

Για κάθε $x>0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(0)=1\Leftrightarrow f'(x)-1>0\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$.

Η g έχει ελάχιστο το $g(0)=f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{xg(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{1}{f(x)-x}\right)=+\infty$ γιατί επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής, άρα $f(x)>x$ για κάθε $x\neq0$ και επειδή $f(0)=0$ είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)-x}=+\infty$. Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

Γ4. Επειδή $f(x)\geq x\Leftrightarrow f(x)-x\geq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$ και η $f(x)-x$ είναι συνεχής , ισχύει ότι:

$$\int_0^2(f(x)-x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^2f(x)dx-\int_0^2xdx>0\Leftrightarrow\int_0^2f(x)dx>\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων

Γ5. Είναι $g(x)=f(x)-x\geq0$, οπότε

$$E(\Omega)=\int_0^1g(x)dx=e-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\int_0^1(f(x)-x)dx=e-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\int_0^1f(x)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=e-\frac{5}{2}\Leftrightarrow$$

$$\int_0^1f(x)dx=e-2.$$

Έστω $\varphi(x)=F(x)-F(0)-2,\ x\in[0,2]$. Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η φ είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Είναι $\varphi(1)=F(1)-F(0)-2=\int_0^1f(t)dt-2=e-2-2=e-4<0$,

$\varphi(2)=F(2)-F(0)-2=\int_0^2f(t)dt-2>0$, δηλαδή $\varphi(1)\varphi(2)<0$,

άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\xi)=0\Leftrightarrow F(\xi)=F(0)+2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)(1-2\ln x)+xf''(x)=\dfrac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow f'(x)-2f'(x)\ln x+xf''(x)=\dfrac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow$

$$f'(x)+xf''(x)=2\ln xf'(x)+\frac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow(xf'(x))'=(2\ln xf(x))'\Leftrightarrow xf'(x)=2\ln xf(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Για $x=1$ είναι $c=0$, άρα $xf'(x)-2\ln xf(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{2\ln x}{x}f(x)=0\Leftrightarrow$

$$e^{-\ln^2x}f'(x)-\frac{2\ln x}{x}e^{-\ln^2x}f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-\ln^2x}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-\ln^2x}f(x)=c_1\Leftrightarrow f(x)=c_1e^{\ln^2x},\ c_1\in\mathbb{R}$$

Για $x=1$ είναι $c_1=0$ άρα $f(x)=e^{\ln^2 x}$.

Δ2. Είναι $f'(x)=e^{\ln^2 x}2\frac{\ln x}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

Δ3. Είναι $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x>0$, άρα $f(\alpha)\geq 1 \Leftrightarrow \alpha^{\ln\alpha}\geq 1$ και $f(\beta)\geq 1 \Leftrightarrow \beta^{\ln\beta}\geq 1$, άρα και $\alpha^{\ln\alpha}+\beta^{\ln\beta}\geq 2 \Leftrightarrow 2-\gamma^2\geq 2 \Leftrightarrow \gamma^2\leq 0 \Leftrightarrow \gamma=0$. Τότε $\alpha^{\ln\alpha}+\beta^{\ln\beta}=2$, άρα $f(\alpha)+f(\beta)=2$ και αυτό ισχύει μόνο όταν $f(\alpha)=1 \Leftrightarrow \alpha=1$ και $f(\beta)=1 \Leftrightarrow \beta=1$

Δ4. α) $g(x)=\ln e^{\ln^2 x}=\ln^2 x$. Είναι $g(e)=1$, $g'(x)=2\ln x(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}$ και $g'(e)=\frac{2}{e}$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0=e$ έχει εξίσωση:

$$y-g(e)=g'(e)(x-e) \Leftrightarrow y-1=\frac{2}{e}(x-e) \Leftrightarrow y=\frac{2}{e}x-1$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων

Είναι $g''(x)=2\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}-\ln x}{x^2}=2\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ για κάθε $x>e$ άρα η g είναι κοίλη στο $[e,+\infty)$.

Επειδή η g είναι κοίλη στο $[e,+\infty)$, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής, δηλαδή $g(x)\leq\frac{2}{e}x-1$ για κάθε $x\in[e,+\infty)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_e^{e^2}\left(\frac{2}{e}x-1-\ln^2 x\right)dx=\left[\frac{\cancel{2}}{e}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}-x\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}(x)'\ln^2 x dx \Leftrightarrow$$

$$E=\frac{e^4}{e}-e^2-\frac{e^2}{e}+e-\left[x\ln^2 x\right]_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\cancel{x}\cdot 2\ln x\frac{1}{\cancel{x}}dx \Leftrightarrow$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων

$$E=e^3-e^2-\cancel{e}+\cancel{e}-4e^2+e+2\int_e^{e^2}(x)'\ln x dx \Leftrightarrow$$

$$E=e^3-5e^2+e+2\left[x\ln x\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}dx=e^3-5e^2+e+4e^2-2e-e^2+e=e^3-2e^2$$

β) Είναι $g'(x)=\frac{2\ln x}{x}>0$ για κάθε $x>1$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E'=\int_1^2\left|g^{-1}(x)\right|dx$.

Θέτουμε $g^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=g(u) \Rightarrow dx=g'(u)du$. Για $x=1$ είναι $g(u)=1 \Leftrightarrow u=e$ και για $x=4$ είναι $g(u)=4 \Leftrightarrow u=e^2$.

$$E'=\int_1^2\left|g^{-1}(x)\right|dx=\int_e^{e^2}|u|g'(u)du=\int_e^{e^2}ug'(u)du=\int_e^{e^2}\cancel{u}\cdot 2\frac{\ln u}{\cancel{u}}du=2\int_e^{e^2}(u)'\ln u du \Leftrightarrow$$

$$E'=2\left[u\ln u\right]_e^{e^2}-2\int_e^{e^2}\cancel{u}\frac{1}{\cancel{u}}du=4e^2-\cancel{2e}-2e^2+\cancel{2e}=2e^2$$