Διαγώνισμα στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ομάδα: Α

Όνομα:..Επώνυμο:...ημ/νία:

Θέμα Α

Να τοποθετήσετε στο κουτί, δίπλα σε κάθε πρόταση , το γράμμα Σ αν είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένη. (μονάδες 5x4)

1.Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.	
2.Το $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα.	
3.$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$.	
4.$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$	
5.Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$ τότε $\vec{\alpha}=\left(x_1,y_1\right)$ και $\vec{\beta}=\left(x_2,y_2\right)$	

Θέμα Β

Β1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $\alpha=2$. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$.
(μονάδες 15)

Β2. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-2)$και $\Gamma(-3,\ 4)$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διάμεσος ΑΜ με την πλευρά ΑΓ. (μονάδες 25)

Θέμα Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$ και $\vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$,

όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ (Μονάδες 5)

Γ2 Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι: $\kappa=-2$ (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (Μονάδες 12)

γ) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 13)

Καλή επιτυχία!

Διαγώνισμα στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Όνομα:..Επώνυμο:..ημ/νία:

Ομάδα:Β

Θέμα Α

Να τοποθετήσετε στο κουτί, δίπλα σε κάθε πρόταση , το γράμμα Σ αν είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένη. (μονάδες 5x4)

1.Ισχύει ότι: $\vec{\alpha}\ (\vec{\beta}\,.\,\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta})\ \vec{\gamma}$.	
2. $\|\vec{\alpha}\|^2 = \|\vec{\beta}\|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha}=-\vec{\beta}$	
3.Το $\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα.	
4.Αν $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=\vec{x}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{x}\neq\vec{0}$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.	
5.Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$ τότε $\vec{\alpha}=\left(x_1,y_1\right)$ και $\vec{\beta}=\left(x_2,y_2\right)$	

Θέμα Β

Β1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ με πλευρά $\alpha=4$. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο: $\overrightarrow{K\Lambda}\cdot\overrightarrow{\Lambda M}$.

(μονάδες 15)

Β2. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A\left(-1,1\right)$, $B\left(1,5\right)$ και $\Gamma\left(9,-9\right)$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διάμεσος ΒΜ με την πλευρά ΑΒ. (μονάδες 25)

Θέμα Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$ και $\vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$,

όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ (Μονάδες 5)

Γ2 Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι: $\kappa=-2$ (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (Μονάδες 12)

γ) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 13)

Καλή επιτυχία!

Λύσεις

Ομάδα Α

Θέμα Α

1. Λ 2. Σ 3. Λ 4. Λ 5. Λ

Θέμα Β

Β1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{B\Gamma}|\sigma\upsilon\nu 120^\circ=2\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

Β2. Είναι $x_M=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=-2$, $y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=1$, άρα $M(-2,1)$.

$\overrightarrow{AM}=(-2-1,1-2)=(-3,-1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-3-1,4-2)=(-4,2)$

$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)=\frac{-3(-4)-1\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{(-4)^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}=\frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{2}\sqrt{10}}=\frac{\cancel{10}}{\cancel{10}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα

$\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)=45^\circ$

Θέμα Γ

Γ1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu 60^\circ=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1$

Γ2. α) $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\left(\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\kappa\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=\kappa\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}\cdot 1-|\vec{\beta}|^2=\kappa\Leftrightarrow$

$\frac{\kappa}{2}-1=\kappa\Leftrightarrow\kappa-2=2\kappa\Leftrightarrow\kappa=-2$

β) για κ=-2 : $\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και

$|\vec{\gamma}|^2=|-\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=$

$|\vec{\alpha}|^2+2\cdot 1+|\vec{\beta}|^2=4+2+1=7$

Άρα $|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$

γ) $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}(-\vec{\alpha}-\vec{\beta})=-\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-4-1=-5$

$(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma})\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}-2\vec{\gamma}^2=3\cdot 1-3(-5)+2(-2)-2\sqrt{7}^2=$

$3+15-4-14=0$

Οπότε τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

Ομάδα Β

Θέμα Α

1. Λ 2. Λ 3. Λ 4. Λ 5. Λ

Θέμα Β

Β1. $\overrightarrow{ΚΛ}\cdot\overrightarrow{ΛΜ}=|\overrightarrow{ΚΛ}||\overrightarrow{ΛΜ}|συν120^\circ=4\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$

Β2. Είναι $x_M=\frac{x_A+x_Γ}{2}=4$, $y_M=\frac{y_A+y_Γ}{2}=-4$, άρα $M(4,-4)$.

$\overrightarrow{BM}=(4-1,-4-5)=(3,-9)$, $\overrightarrow{BA}=(-1-1,1-5)=(-2,-4)$

$συν\left(\overrightarrow{BM}\hat{,}\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3(-2)-4\cdot(-9)}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}\sqrt{3^2+(-9)^2}}=\frac{30}{\sqrt{20}\sqrt{90}}=\frac{30}{\sqrt{10}\sqrt{2}\cdot3\sqrt{10}}=\frac{\cancel{30}}{\cancel{30}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα

$\left(\overrightarrow{BM}\hat{,}\overrightarrow{BA}\right)=45^\circ$

Θέμα Γ

Γ1. $\vec{α}\cdot\vec{β}=|\vec{α}|\cdot|\vec{β}|\cdot συν\left(\vec{α},\vec{β}\right)=|\vec{α}|\cdot|\vec{β}|\cdot συν60^\circ=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1$

Γ2. α) $\vec{β}\cdot\vec{γ}=κ\Leftrightarrow\vec{β}\cdot\left(\frac{κ}{2}\cdot\vec{α}-\vec{β}\right)=κ\Leftrightarrow\frac{κ}{2}\cdot\vec{α}\cdot\vec{β}-\vec{β}^2=κ\Leftrightarrow\frac{κ}{2}\cdot1-|\vec{β}|^2=κ\Leftrightarrow$

$\frac{κ}{2}-1=κ\Leftrightarrow κ-2=2κ\Leftrightarrow κ=-2$

β) για κ=-2 : $\vec{γ}=-\vec{α}-\vec{β}$ και

$|\vec{γ}|^2=|-\vec{α}-\vec{β}|^2=|\vec{α}+\vec{β}|^2=\left(\vec{α}+\vec{β}\right)^2=\vec{α}^2+2\vec{α}\cdot\vec{β}+\vec{β}^2=$

$|\vec{α}|^2+2\cdot1+|\vec{β}|^2=4+2+1=7$

Άρα $|\vec{γ}|=\sqrt{7}$

γ) $\vec{β}\cdot\vec{γ}=-2$

$\vec{α}\cdot\vec{γ}=\vec{α}(-\vec{α}-\vec{β})=-\vec{α}^2-\vec{α}\cdot\vec{β}=-4-1=-5$

$(3\vec{α}+2\vec{γ})\cdot(\vec{β}-\vec{γ})=3\vec{α}\cdot\vec{β}-3\vec{α}\cdot\vec{γ}+2\vec{β}\cdot\vec{γ}-2\vec{γ}^2=3\cdot1-3(-5)+2(-2)-2\sqrt{7}^2=$

$3+15-4-14=0$

Οπότε τα διανύσματα $3\vec{α}+2\vec{γ}$ και $\vec{β}-\vec{γ}$ είναι κάθετα.