

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

➤ Σχέσεις της μορφής $f(x \pm y) = \dots$

- Για να βρούμε το $f(0)$ συνήθως αντικαθιστούμε $x = y = 0$.
- Για να αποδείξουμε ότι η f είναι άρτια ή περιπτή, συνήθως αντικαθιστούμε $y = -x$ ή $x = -y$ ή $x = 0$ ή $y = 0$.

Γενικά δίνουμε στα x, y κατάλληλες τιμές για να προκύψει το ζητούμενο.

➤ Σχέσεις της μορφής $f(xy) = \dots$

- Για να βρούμε το $f(1)$ συνήθως αντικαθιστούμε $x = y = 1$
- Για να προκύψει ισότητα με έναν άγνωστο, συνήθως αντικαθιστούμε $x = 1$ ή $y = 1$ ή $y = \frac{1}{x}$.

Γενικά δίνουμε στα x, y κατάλληλες τιμές για να προκύψει το ζητούμενο.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(0) = 0$

b) Η f είναι περιπτή

γ) $f(2x) = 2f(x)$

d) $f(vx) = vf(x)$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

a) Στη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (1), αντικαθιστούμε $x = y = 0$ και προκύπτει:

$$f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

b) Αντικαθιστούμε στην (1) $y = -x$ και προκύπτει:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

άρα η f είναι περιπτή.

γ) Η (1) για $y = x$ γίνεται: $f(x+x) = f(x) + f(x) \Leftrightarrow f(2x) = 2f(x)$

d) Για $v = 1$ η πρόταση $f(vx) = vf(x)$ (2), γίνεται: $f(x) = f(x)$ και είναι αληθής.

Εστω ότι η (2) είναι αληθής, θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και η πρόταση

$$f((v+1)x) = (v+1)f(x).$$

$$f((v+1)x) = f(vx+x) = f(vx) + f(x) = vf(x) + f(x) = (v+1)f(x).$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, για την οποία ισχύει: $2f(xy) = f(x) \cdot f(y) + xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(1) = 1$

b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

c) $2f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{x}{y}$

d) $f(x) = x$

Λύση

a) Αν στη σχέση $2f(xy) = f(x) \cdot f(y) + xy$ (1), αντικαταστήσουμε $x = y = 1$, προκύπτει:

$$2f(1) = f(1) \cdot f(1) + 1 \Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

b) Η σχέση (1) για $y = \frac{1}{x}$, γίνεται:

$$\begin{aligned} 2f\left(x \frac{1}{x}\right) &= f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) + x \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2f(1) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Leftrightarrow \\ 2 &= f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Leftrightarrow f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

c) Αντικαθιστούμε στην (1) όπου y το $\frac{1}{y}$ και προκύπτει:

$$2f\left(x \frac{1}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) + x \frac{1}{y} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{x}{y}$$

d) Αν $y = 1$, η σχέση (1) γίνεται:

$$2f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) + x \cdot 1 \Leftrightarrow 2f(x) = f(x) + x \Leftrightarrow 2f(x) - f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$$

3. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για $x = y = 0$, έχουμε: $f(0) = 2f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Για $y = 0$ είναι $f(x) = 2f(x) + f(0) \Leftrightarrow f(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = \frac{1}{2}f(x)f(y) + \frac{1}{2}xy$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδειχθεί ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

b) Να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση

a) Για $x=y=1$ είναι: $f(1)=\frac{1}{2}f(1)f(1)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(1)=f^2(1)+1\Leftrightarrow f^2(1)-2f(1)+1=0\Leftrightarrow (f(1)-1)^2=0\Leftrightarrow f(1)=1$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

B) Για $y=1$ είναι: $f(x)=\frac{1}{2}f(x)f(1)+\frac{1}{2}x \cdot 1 \Leftrightarrow 2f(x)=f(x)+x \Leftrightarrow f(x)=x, x \in \mathbb{R}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f(x^2+y^2)=xf(x)+yf(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

a) $f(0)=0$

B) η f είναι περιπτή

γ) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \geq 0$.

Λύση

a) Για $x=y=0$, έχουμε: $f(0)=0 \cdot f(0)+0 \cdot f(0)=0$

B) Για $y=-x$ έχουμε: $f(x^2+(-x)^2)=xf(x)-xf(-x) \Leftrightarrow f(2x^2)=xf(x)-xf(-x)$ (1)

Για $y=x$ έχουμε: $f(x^2+x^2)=xf(x)+xf(x) \Leftrightarrow f(2x^2)=2xf(x)$ (2)

Από τις (1),(2) έχουμε

$2xf(x)=xf(x)-xf(-x) \Leftrightarrow xf(x)+xf(-x)=0 \Leftrightarrow x(f(x)+f(-x))=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $f(x)+f(-x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

Αν $x=0$, τότε $f(0)=0$ που ικανοποιεί τον ορισμό της περιπτής συνάρτησης.

Αν $f(-x)=-f(x)$, τότε f περιπτή.

γ) Για $y=0$ η αρχική σχέση γίνεται: $f(x^2)=xf(x)$, οπότε και $f(y^2)=yf(y)$.

Με πρόσθετη κατά μέλη έχουμε: $f(x^2)+f(y^2)=xf(x)+yf(y)$. Όμως

$f(x^2+y^2)=xf(x)+yf(y)$ άρα $f(x^2+y^2)=f(x^2)+f(y^2)$.

Αν θέσουμε $x^2=\alpha$, $y^2=\beta$, $\alpha, \beta \geq 0$ έχουμε: $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f(xy)-f(x) \cdot f(xz) \geq 4-3f(x)$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδείξετε ότι $f(0)=f(1)=2$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

a) Για $x=y=z=0$ είναι:

$f(0)-f(0)f(0) \geq 4-3f(0) \Leftrightarrow f^2(0)-4f(0)+4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0)-2)^2 \leq 0$

Όμως $(f(0)-2)^2 \geq 0$, οπότε $f(0)-2=0 \Leftrightarrow f(0)=2$

Για $x=y=z=1$ είναι: $f(1)-f(1)f(1) \geq 4 - 3f(1) \Leftrightarrow f^2(1) - 4f(1) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1)-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1)-2=0 \Leftrightarrow f(1)=2$.

β) Για $y=z=1$ είναι: $f(x)-f(x)f(x) \geq 4 - 3f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 4f(x) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(x)-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2, x \in \mathbb{R}$.

7. Εστω άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- a)** $f(0) \geq 0$
- β)** $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- γ)** $|f(x)-f(y)| \leq f(x-y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Για $x=y=0$ $f(0) \leq f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0) \geq 0$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $0 \leq f(0) = f[x+(-x)] \leq f(x)+f(-x)$ $\stackrel{f \text{ άρτια}}{=} f(x)+f(x) = 2f(x)$
άρα $2f(x) \geq 0$ οπότε $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

γ) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = f[(x-y)+y] \leq f(x-y)+f(y)$

άρα $f(x)-f(y) \leq f(x-y) \quad (1)$

Όμοια $f(y) = f[(y-x)+x] \stackrel{(i)}{\leq} f(y-x)+f(x) = f(x-y)+f(x)$ οπότε $f(y)-f(x) \leq f(x-y)$ ή
 $f(x-y) \geq -[f(x)-f(y)]$.

Από (1), (2): $-f(x-y) \leq f(x)-f(y) \leq f(x-y) \Leftrightarrow |f(x)-f(y)| \leq f(x-y)$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$2f(x)+f(1-x)+g(x)-g(y)=(x-1)^2+2y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $g(0)=0$. Να αποδείξετε ότι είναι ίσες.

Λύση

Για $y=x$ είναι:

$$2f(x)+f(1-x)+g(x)-g(x)=(x-1)^2+2x \Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x)=x^2-2x+1+2x \Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x)=x^2+1 \quad (1)$$

Αν στην (1) αντικαταστήσουμε όπου x το $1-x$ έχουμε:

$$2f(1-x)+f(1-1+x)=(1-x)^2+1 \Leftrightarrow 2f(1-x)+f(x)=x^2-2x+2 \quad (2)$$

Η f θα βρεθεί από το σύστημα των (1),(2). Είναι:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2 + 1 \\ 2f(1-x) + f(x) = x^2 - 2x + 2 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4f(x) - 2f(1-x) = -2x^2 - 2 \\ 2f(1-x) + f(x) = x^2 - 2x + 2 \end{cases} \stackrel{(+) \Rightarrow}{\Rightarrow} -3f(x) = -x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

9. Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(ax) \leq |a|f(x)$ για κάθε $a, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

a) $f(0) = 0$

b) $f(ax) = |a|x$ για κάθε $a, x \in \mathbb{R}$.

Λύση

a) Για $x = 0, a = 2$: $f(0) \leq 2|f(0) \Leftrightarrow f(0) \leq 2f(0) \Leftrightarrow f(0) \geq 0$

$$\text{Για } x = 0, a = \frac{1}{2}: f(0) \leq \left| \frac{1}{2} \right| f(0) \Leftrightarrow f(0) \leq \frac{1}{2} f(0) \Leftrightarrow 2f(0) \leq f(0) \Leftrightarrow f(0) \leq 0$$

Άρα $f(0) = 0$

b) Για $x = 1$: $f(a) \leq |a|f(1) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ άρα και $f(x) \leq |x|f(1) \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Αν } a = \frac{1}{x} \text{ τότε από την υπόθεση θα είναι } f(1) \leq \left| \frac{1}{x} \right| f(x) \Rightarrow f(x) \geq |x|f(1) \quad (2)$$

Από (1), (2): $f(x) = |x|f(1) \quad (3)$.

Άρα $f(ax) = |ax|f(1) = |a| \cdot |x|f(1) \stackrel{(3)}{=} |a| \cdot f(x)$

10. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x-y) - f(x+y) = f(x)f(y) \quad (1)$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

a) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

b) Η f είναι άρτια

γ) $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

a) Για $x = y = 0$ είναι $f(0) - f(0) = f(0)f(0) \Leftrightarrow f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$, άρα η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

b) Για $x = 0$ είναι $f(-y) - f(y) = f(x) f(0)^0 \Leftrightarrow f(-y) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι άρτια.

γ) Για $y = x$ είναι $f(0) - f(2x) = f(x)f(x) \Leftrightarrow f(2x) = -f^2(x)$ και αν αντικαταστήσουμε όπου x το $\frac{x}{2}$, έχουμε ότι: $f\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = -f^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = -f^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 0$

11. Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)f(y-z)+1 \leq f(x-z)+f(x-y)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για $x = y = z = 0$ είναι

$$f^2(0) + 1 \leq f(0) + f(0) \Leftrightarrow f^2(0) - 2f(0) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

Για $y = z = 0$ είναι: $f(x)f(0) + 1 \leq f(x) + f(x) \Leftrightarrow \cancel{f(x)} + 1 \leq \cancel{f(x)} + f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \quad (1)$

Για $y = z = x$ είναι

$$f(x)f(x-x) + 1 \leq f(x-x) + f(x-x) \Leftrightarrow f(x)f(0) + 1 \leq 2f(0) \Leftrightarrow f(x) + 1 \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \quad (2)$$

Από τις (1),(2) είναι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) + y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Άντας $f(0) = 1$ να υπολογίσετε το $f(1)$ και να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Για $y = 1$ και $x = 0$ είναι $f(1) = f(0) + 1 = 2$

Για $y = -x$ είναι $f(x-x) = f(x) - x \Leftrightarrow f(0) = f(x) - x \Leftrightarrow f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

13. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y))$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

b) η f είναι περιπτή.

Λύση

a) Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $f(0) = 0$

Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = f(f(0)) + f(f(0)) \Leftrightarrow 0 = 2f(f(0)) \Leftrightarrow f(f(0)) = 0 \quad (1)$

Για $y = 0$ είναι: $f(x) = f(f(x)) + f(f(0)) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x) = f(f(x)) \quad (1)$

Όμοια για $x = 0$ προκύπτει $f(f(y)) = f(y) \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) έχουμε: $f(f(x)) + f(f(y)) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$

b) Για $y = -x$ έχουμε: $f(x-x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, άρα f περιπτή.

14. Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$2f(xy) = f(x)f(y) - 4x - 4y \quad (1) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Λύση

$$\text{Για } x=y=1 \text{ είναι } 2f(1) = f(1)f(1) - 4 - 4 \Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(1)-4)(f(1)+2) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 4 \text{ ή } f(1) = -2$$

Αν $f(1) = -2$, τότε η σχέση (1) για $x = -1$ γίνεται:

$$2f(1) = f^2(-1) + 4 + 4 \Leftrightarrow -4 = f^2(-1) + 8 \Leftrightarrow f^2(-1) = -12 \text{ αδύνατο. Άρα } f(1) = 4.$$

$$\text{Για } y=1 \text{ είναι } 2f(x) = f(x)f(1) - 4x - 4 \Leftrightarrow 2f(x) = 4f(x) - 4x - 4 \Leftrightarrow$$

$$-2f(x) = -4x - 4 \Leftrightarrow f(x) = 2x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(0) = 0$

b) $f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$

Λύση

a) Για $x=y=0$ στη σχέση $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ (1), προκύπτει:

$$f(0) \leq f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) \geq 0 \quad (2)$$

Όμως για $x=0$ στη σχέση $f(x) \leq x$ προκύπτει $f(0) \leq 0$ (3).

Από τις (2),(3) είναι $f(0) = 0$.

b) Για $y=-x$ στην (1) προκύπτει $f(0) \leq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) \geq 0$ (4)

Όμως $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και $f(-x) \leq -x$ και με πρόσθεση κατά μέλη είναι:

$$f(x) + f(-x) \leq 0 \quad (5).$$

Η σχέση $f(-x) \leq -x$ γίνεται: $-f(x) \leq -x \Leftrightarrow f(x) \geq x$ και επειδή $f(x) \leq x$, τελικά είναι

$$f(x) = x.$$

Αντίστροφη συνάρτηση

16. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, για κάθε $x, y > 0$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R}^* :

a) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

b) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(\kappa - \lambda) = \frac{f^{-1}(\kappa)}{f^{-1}(\lambda)}$ για κάθε κ, λ που ανήκουν στο σύνολο τιμών της f .

c) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^2 + 1) = f(x^2 + 6) + f(x - 1)$.

d) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

a) Η σχέση: $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1)$ για $x = y = 1$ γίνεται:

$$f(1) - f(1) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0. \text{ Οπότε } \eta x = 1 \text{ είναι η μοναδική ρίζα της } f.$$

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Η σχέση (1) για $x = x_1$ και $y = x_2$, γίνεται:

$$f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ οπότε } \eta f \text{ είναι } 1-1, \text{ οπότε}$$

αντιστρέφεται.

b) Εστω $f(x) = \kappa$ και $f(y) = \lambda$, τότε $x = f^{-1}(\kappa)$ και $y = f^{-1}(\lambda)$.

$$\text{Είναι } f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right), \text{ άρα:}$$

$$f^{-1}(f(x) - f(y)) = f^{-1}\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right) \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa - \lambda) = \frac{x}{y} \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa - \lambda) = \frac{f^{-1}(\kappa)}{f^{-1}(\lambda)}.$$

$$c) f(x) + f(x^2 + 1) = f(x^2 + 6) + f(x - 1) \Leftrightarrow f(x) - f(x^2 + 6) = f(x - 1) - f(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$
$$f\left(\frac{x}{x^2 + 6}\right) = f\left(\frac{x - 1}{x^2 + 1}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 6} = \frac{x - 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^3 + x = x^3 + 6x - x^2 - 6 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

17. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y) + 1$ για κάθε $x, y > 0$. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(1) = -1$

b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) - 2$

c) $f(x^v) = vf(x) + v - 1$, $v \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$.

d) Αν η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$ τότε η f είναι $1-1$.

Λύση

α) Για $x = y = 1$ είναι: $f(1) = f(1) + f(1) + 1 \Leftrightarrow f(1) = -1$.

β) Για $y = \frac{1}{x}$ είναι: $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Leftrightarrow f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Leftrightarrow -1 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) - 2$

γ) Για $v = 1$ είναι $f(x^1) = 1 \cdot f(x) + 1 - 1 \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ που ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $v = \kappa$, δηλαδή $f(x^\kappa) = \kappa f(x) + \kappa - 1$. Θα αποδείξουμε ότι η (2)

αληθεύει και για $v = \kappa + 1$, δηλαδή: $f(x^{\kappa+1}) = (\kappa + 1)f(x) + \kappa$.

Είναι $f(x^{\kappa+1}) = f(x^\kappa \cdot x) = f(x^\kappa) + f(x) + 1 = \kappa f(x) + \kappa - 1 + f(x) + 1 = (\kappa + 1)f(x) + \kappa$

δ) Εστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Αντικαθιστώντας στην (1) $x = x_1$ και $y = \frac{1}{x_2}$, έχουμε:

$f\left(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\right) = f(x_1) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) + 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2) - 2 + 1 \Leftrightarrow$ άρα $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -1$.

Επειδή η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$, ισχύει ότι:

$\frac{x_1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1.

18. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x-y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε η f είναι 1-1.

γ) Η f είναι περιπτή.

δ) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = f(0) - f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

β) Επειδή $f(0) = 0$, το $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της f .

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε $f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = 0$ και επειδή το $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της f , ισχύει ότι $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1.

γ) Για $x = 0$ είναι $f(0-y) = f(0) - f(y) \Leftrightarrow f(-y) = -f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι περιπτή.

δ) Αν στην αρχική σχέση αντικαταστήσουμε όπου $y = -x$ έχουμε:

$$f(x-y) = f(x) - f(-y) \stackrel{f \text{ περιπτώ}}{=} f(x) + f(y)$$

- 19.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(\beta + f(\beta + \alpha)) = f(2\beta) + \alpha$
για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $f(0) = 0$ **β)** $f(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$
γ) η f αντιστρέφεται **δ)** $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση

α) Για $\beta = 0$ είναι $f(f(\alpha)) = f(0) + \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, άρα και $f(f(x)) = f(0) + x$ (1)

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $\alpha = 0$ είναι $f(\beta + f(\beta)) = f(2\beta)$, άρα και $f(x + f(x)) = f(2x)$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν στην (1) αντικαταστήσουμε όπου x το $f(x)$ προκύπτει:

$$f(f(f(x))) = f(0) + f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(f(0) + x) = f(0) + f(x) \text{ και για } x = 0 \text{ είναι } f(f(0)) = 2f(0)$$

Όμως η (1) για $x = 0$ γίνεται $f(f(0)) = f(0)$, άρα $2f(0) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

β) Από την (1) είναι $f(f(x)) = x$.

γ) Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα f 1-1.

δ) Από τη σχέση (2), έχουμε: $f(x + f(x)) = f(2x) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = x$.

Όρια

- 20.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (1), για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

- α)** f περιπτών
β) Άν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lambda$.

Λύση

α) Για $x = y = 0$ στη (1) γίνεται: $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$, ενώ

για $y = -x$ στη (1) γίνεται: $f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, άρα f περιπτών

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(-x)] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$ (2)

Εστω $-x = u$, όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι $u \rightarrow -\infty$, οπότε στη (2) γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = -\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\lambda$$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y)$ κάθε

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1. \text{ Να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

Λύση

Θέτουμε $x = 2h$. Όταν $x \rightarrow 2$, τότε $h \rightarrow 1$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(2h)-f(2)}{2h-2} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\cancel{f(2)} + f(h) - \cancel{f(2)}}{2(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{f(h)}{h-1} = \frac{1}{2}$$

22. Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$8f(x+y) = f(2x) + f(2y) + 24xy(x+y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f^2(x)} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x^3)}$$

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+1) + \sqrt{f^{-1}(x+1)} - 2}{x}$$

Λύση

a) Για $y = x$ είναι $8f(2x) = f(2x) + f(2x) + 48x^3 \Leftrightarrow f(2x) = 8x^3$.

Αν θέσουμε $2x = u$ προκύπτει $f(u) = u^3$ άρα και $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

b) i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^9} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} = +\infty$

γ) Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $x_1^3 \neq x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, άρα f 1-1.

Θέτουμε $f^{-1}(x+1) = u \Leftrightarrow x+1 = f(u) \Leftrightarrow x = u^3 - 1$. Όταν $x \rightarrow 0$, τότε $u \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+1) + \sqrt{f^{-1}(x+1)} - 2}{x} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u + \sqrt{u} - 2}{u^3 - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \left[\frac{\cancel{u-1}}{(\cancel{u-1})(u^2 + u + 1)} + \frac{\sqrt{u}-1}{u^3-1} \right] = \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \left[\frac{1}{u^2 + u + 1} + \frac{\cancel{u-1}}{(\cancel{u-1})(u^2 + u + 1)(\sqrt{u} + 1)} \right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Συνέχεια συνάρτησης f μέσω συναρτησιακής σχέσης $f(x+y) = \dots$

Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $a \in \mathbb{R}$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

- Θέτουμε: $x - x_0 = h - a \Leftrightarrow x = (x_0 - a) + h$ όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow a$.
- Τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow a} f((x_0 - a) + h) = \dots$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in D_f$, οπότε και σε όλο το D_f .

Συνέχεια συνάρτησης f μέσω συναρτησιακής σχέσης $f(xy) = \dots$

Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $a \in \mathbb{R}$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

- Θέτουμε: $\frac{x}{x_0} = \frac{h}{a} \Leftrightarrow x = \frac{x_0}{a} \cdot h$. Όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow a$.
- Τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow a} f\left(\frac{x_0}{a} \cdot h\right) = \dots$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in D_f$, οπότε και σε όλο το πεδίο ορισμού της.

23. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y) = f(x) - f(y)$ (1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_1 = 2$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Λύση

Επειδόν η f είναι συνεχής στο $x_1 = 2$, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Για να είναι η f συνεχής στο \mathbb{R} , αρκεί $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $x - x_0 = h - 2 \Leftrightarrow x = (x_0 - 2) + h$. Όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow 2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 2} f((x_0 - 2) + h) = \lim_{h \rightarrow 2} (f(x_0 - 2) - f(h)) = f(x_0 - 2) - \lim_{h \rightarrow 2} f(h) = \\ &= f(x_0 - 2) - f(2) = f(x_0 - 2 + 2) = f(x_0) \end{aligned}$$

24. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = xf(y) - yf(x)$ (1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_1 = 4$, να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Λύση

Επειδόν η f είναι συνεχής στο $x_1 = 4$, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$.

Για να είναι η f συνεχής στο \mathbb{R} , αρκεί $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $\frac{x}{x_0} = \frac{h}{4} \Leftrightarrow x = \frac{x_0}{4} \cdot h$. Όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow 4$. Τότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 4} f\left(\frac{x_0}{4} \cdot h\right) \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 4} \left[\frac{x_0}{4} f(h) - h f\left(\frac{x_0}{4}\right) \right] = \frac{x_0}{4} \lim_{h \rightarrow 4} f(h) - 4 f\left(\frac{x_0}{4}\right) = \\ \frac{x_0}{4} f(4) - 4 f\left(\frac{x_0}{4}\right) &\stackrel{(1)}{=} f\left(\frac{x_0}{4} \cdot 4\right) = f(x_0)\end{aligned}$$

25. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 1$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(xy) = f(x) + f(y) + (x^2 - x)(y^2 - y) \text{ για κάθε } x, y > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$$

Να αποδείξετε ότι:

a) η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{4}{x_0} + x_0 - 1$, $x_0 > 0$

Λύση

a) Για $x = y = 1$ είναι: $f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$. Επειδόν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ισχύει:

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$. Για να είναι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0 \in (0, +\infty)$. Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Θέτουμε $\frac{x}{x_0} = \frac{h}{1} \Leftrightarrow x = x_0 \cdot h$. Όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow 1$. Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = \lim_{h \rightarrow 1} [f(x_0) + f(h) + (x_0^2 - x_0)(h^2 - h)] = f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 1} f(h) + 0 = f(x_0)$$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h) + (x_0^2 - x_0)(h^2 - h)}{x_0(h-1)} =$

$$= \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h)}{h-1} + \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{x_0(x_0-1)(h-1) \cdot h}{x_0(h-1)} \right) = \frac{1}{x_0} \cdot 4 + x_0 - 1 = \frac{4}{x_0} + x_0 - 1$$

26. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και

$$f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad x, y \in (0, +\infty) \quad (1).$$

a) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσωπο στο $(0, +\infty)$.

b) Να βρείτε το $f(1)$.

c) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

d) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + x \sin \frac{\pi}{x} - x + 1 = 0$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

a) Εστω ότι $\exists \theta \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\theta) = 0$.

Για $x = \theta$ και $y = 1$ έχουμε $f(\theta) = 0 - \frac{\theta^2 + 1}{\theta} \Rightarrow \theta^2 = -1$ άτοπο.

Άρα $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

b) Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\exists \alpha \in (0, +\infty) : f(\alpha) > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Στην (1) για $x = y = 1$ είναι: $f(1) = 2$ ή $f(1) = -1$ που απορρίπτεται. Άρα $f(1) = 2$

c) Στην (1) για $y = 1 \Rightarrow f(x) = 2f(x) - \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) Διαιρώντας με x τη εξίσωση γίνεται $x + \sigma v \frac{\pi}{x} - 1 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 - \sigma v \frac{\pi}{x}$.

Όμως ισχύει $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 2$ μόνο για $x = 1$. Επίσης $1 - \sigma v \frac{\pi}{x} \leq 2$
οπότε
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ 1 - \sigma v \frac{\pi}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Παράγωγος

27. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy(x+y) + 2(1)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και η f είναι

παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Λύση

Θέτουμε στην (1) $x = y = 0$, οπότε: $f(0) = f(0) + f(0) + 2 \Leftrightarrow f(0) = -2$.

Άρα $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x} = 2$.

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αρκεί να υπάρχει στο \mathbb{R} το όριο

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x_0 \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h$, όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow 0$. Τότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) + 2x_0 \cdot h \cdot (x_0 + h) + 2 - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h) + 2}{h} + \frac{2x_0 h (x_0 + h)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 (x_0 + h)) = f'(0) + 2x_0^2 = 2 + 2x_0^2$$

28. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* .

Λύση

Για $x = y = 1$ είναι: $f(1) = f(1)f(1) \Leftrightarrow f(1) - f^2(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ απορρίπτεται ή $f(1) = 1$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ ισχύει ότι: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* αρκεί να υπάρχει στο \mathbb{R}^* το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^*. \text{ Είναι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x=x_0h}{=} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0h) - f(x_0)}{x_0h - x_0} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0)f(h) - f(x_0)}{x_0(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h) - 1}{h-1} \right] \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot f'(1) \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* με $f'(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot f'(1)$.

29. Αν για τη παραγωγίσιμη στο 0 συνάρτηση g ισχύει ότι: $g(x)g(y) \neq 1$ και

$g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Λύση

Για $x = y = 0$ είναι: $g(0) = \frac{2g(0)}{1-g^2(0)} \Leftrightarrow 2g(0) = g(0) - g^3(0) \Leftrightarrow$

$g^3(0) + g(0) = 0 \Leftrightarrow g(0)[g^2(0) + 1] = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$, επειδή $g^2(0) + 1 \neq 0$.

Οπότε $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \in \mathbb{R}$ και αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο 0, θα είναι και συνεχής, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$.

Εστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x_0)+g(h)}{1-g(x_0)g(h)} - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) + g(h) - g(x_0) - g^2(x_0)g(h)}{h[1-g(x_0)g(h)]} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)[1+g^2(x_0)]}{h[1-g(x_0)g(h)]} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(h)}{h} \cdot \frac{1+g^2(x_0)}{1-g(x_0)g(h)} \right] = g'(0) \frac{1+g^2(x_0)}{1-g(x_0)g(0)} = \\ &= g'(0) \frac{1+g^2(x_0)}{1-g(x_0) \cdot 0} = g'(0)[1+g^2(x_0)]. \end{aligned}$$

Οπότε, η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

30. Δίνεται συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο \mathbb{R} και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } a \in \mathbb{R}. \text{ Άνταξη } f \text{ είναι}$$

$$\text{παραγωγίσιμη στο } 0, \text{ με } f'(0) = 2 \text{ και } \text{η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ g(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) - 2x - 3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Λύση

Επειδή η g είναι συνεχής στο x_0 , είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Θέτουμε } x - x_0 = h, \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) + 2x_0 h + h - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h)}{h} + 2x_0 + 1 \right] \quad (1)$$

Η σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + x$ για $x = y = 0$ δίνει $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$,

$$\text{οπότε } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2 \quad (2).$$

Άρα, η (1) με βάση την (2) γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h)}{h} + 2x_0 + 1 \right] = 2 + 2x_0 + 1 = 2x_0 + 3, \text{ δηλαδή:}$$

$$g(x_0) = 2x_0 + 3 \Leftrightarrow g(x_0) - 2x_0 - 3 = 0, \text{ άρα το } x_0 \text{ είναι ρίζα της εξίσωσης } g(x) - 2x - 3 = 0.$$

Οπότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

31. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(0) = 1$

b) $f(vx) = f^v(x)$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2, x \in \mathbb{R}$ (1).

c) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ τότε η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

d) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = f'(0)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

e) Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε: $f^{-1}(ab) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$ για κάθε a, b που ανήκουν στο σύνολο τιμών της f .

Λύση

a) Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0) = 1$ ή $f(0) = 0$ που απορρίπτεται.

b) Για $v = 2$ είναι $f(2x) = f^2(x)$. Αν στην αρχική αντικαταστάσουμε $y = x$ προκύπτει το ζητούμενο. Έστω ότι ισχύει για $v = k$.

$$\text{Θα δείξουμε ότι ισχύει και για } v = k+1, \text{ δηλαδή } f((k+1)x) = f^{k+1}(x).$$

Είναι $f((\kappa+1)x) = f(\kappa x + x) = f(\kappa x)f(x) = f^\kappa(x)f(x) = f^{\kappa+1}(x)$

γ) $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x)f(h)) = f(x)\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(x)f(0) = f(x)$

δ) f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(h)-1)}{h} = f(x)f'(0)$

ε) $f^{-1}(f(\alpha+\beta)) = f^{-1}(f(\alpha)f(\beta)) \Leftrightarrow \alpha+\beta = f^{-1}(f(\alpha)f(\beta)) \quad (1)$
 $f(x) = \alpha \Leftrightarrow x = f^{-1}(\alpha), f(y) = \beta \Leftrightarrow y = f^{-1}(\beta), \text{ τότε } (1) \Rightarrow f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta) = f^{-1}(\alpha\beta)$

32. Εστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1, με $f'(1) = 1$. Αν για κάθε

$x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $f(xy) = x^2f(y) + y^2f(x)$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh)-f(x)}{xh-x} = \frac{2f(x)}{x} + x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2}{x}f(x) + x$, $x > 0$.

Λύση

α) Για $x = y = 1 \Rightarrow f(1) = 0$.

β) $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh)-f(x)}{xh-x} = \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{x^2f(h) + h^2f(x) - f(x)}{x(h-1)} \right] = \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)(h^2-1)}{x(h-1)} + \frac{x^2f(h)}{x(h-1)} \right] =$
 $\lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)(h-1)(h+1)}{x(h-1)} + x \frac{f(h)}{h-1} \right] = \frac{2f(x)}{x} + xf'(1) = \frac{2f(x)}{x} + x$.

γ) Για κάθε $x > 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \stackrel{\theta \epsilon \tau o x=x_0 h}{=} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h)-f(x_0)}{x_0 h-x_0} \stackrel{(β)}{=} \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0$
άρα $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + x$.

33. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) - 3y^2 \leq f(x+y) \leq f(x) + 2y^2$,

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Λύση

a) Αρκεί $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Για $x = x_0$ και $y = h$ είναι: $f(x_0) - 3h^2 \leq f(x_0 + h) \leq f(x_0) + 2h^2$ (1).

Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) - 3h^2) = f(x_0)$ και $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) + 2h^2) = f(x_0)$, οπότε και $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, áρα η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

b) Άντοντας $h > 0$ στη (1) γίνεται: $-3h^2 \leq f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 2h^2 \Leftrightarrow -3h \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 2h$.

Είναι $\lim_{h \rightarrow 0^+} (-3h) = 0$ και $\lim_{h \rightarrow 0^+} (2h) = 0$, οπότε και $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$. (2).

Άντοντας $h < 0$ στη (1) γίνεται: $-3h \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 2h \Leftrightarrow 2h \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq -3h$.

Είναι $\lim_{h \rightarrow 0^-} (2h) = 0$ και $\lim_{h \rightarrow 0^-} (-3h) = 0$, οπότε και $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$. (3).

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 0$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

34. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$g(xy) = g(x) - g(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $xg'(x) + yg'(y) = 0$.

Λύση

Παραγωγίζουμε τη σχέση $g(xy) = g(x) - g(y)$ (1) ως προς x , θεωρώντας το y σταθερά,

οπότε: $g'(xy)(xy)' = g'(x) - 0 \Leftrightarrow yg'(xy) = g'(x) \stackrel{y \neq 0}{\Leftrightarrow} g'(xy) = \frac{g'(x)}{y}$ (2).

Επίσης, παραγωγίζουμε την (1) ως προς y , θεωρώντας το x σταθερά και είναι:

$g'(xy)(xy)' = 0 - g'(y) \Leftrightarrow xg'(xy) = -g'(y) \Leftrightarrow g'(xy) = -\frac{g'(y)}{x}$ (3).

Από (2), (3) προκύπτει ότι:

$$\frac{g'(x)}{y} = -\frac{g'(y)}{x} \Leftrightarrow xg'(x) = -yg'(y) \Leftrightarrow xg'(x) + yg'(y) = 0.$$

35. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$f(x+y) = f(x) + f(y) + x \cdot y$, για κάθε $x, y \neq 0$. Άντοντας $A(y, f'(y))$ και $B(x, f'(x))$, με $y \neq x$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB σχηματίζει με τον άξονα x' , γωνία 45° .

Λύση

Παραγωγίζοντας ως προς x , είναι: $f'(x+y) = f'(x) + y$ και ως προς y , έχουμε:

$$f'(x+y) = f'(y) + x. \text{Άρα, } f'(x) + y = f'(y) + x \Leftrightarrow f'(y) - f'(x) = y - x \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} = 1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1, \text{ áρα } \omega = 45^\circ.$$

- 36.** Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) = e^{-y}f(x) + e^{-x}f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $e^{-y}[f'(x) + f(x)] = e^{-x}[f'(y) + f(y)]$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

Παραγωγίζοντας ως προς x , έχουμε: $f'(x+y) = e^{-y}f'(x) - e^{-x}f(y)$.

Παραγωγίζοντας ως προς y , έχουμε: $f'(x+y) = -e^{-y}f(x) + e^{-x}f'(y)$, άρα $e^{-y}f'(x) - e^{-x}f(y) = -e^{-y}f(x) + e^{-x}f'(y) \Leftrightarrow e^{-y}f'(x) + e^{-y}f(x) = e^{-x}f'(y) + e^{-x}f(y) \Leftrightarrow e^{-y}(f'(x) + f(x)) = e^{-x}(f'(y) + f(y))$

- 37.** Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* για την οποία ισχύει ότι $f(xy) = x^2f(y) + y^2f(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι

$$f''(x) - f''(y) = \frac{2f(x)}{x^2} - \frac{2f(y)}{y^2} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Λύση

Παραγωγίζοντας ως προς y , έχουμε: $f'(xy)x = x^2f'(y) + 2yf(x)$ και για $y=1$ είναι

$$f'(x)x = x^2f'(1) + 2f(x) \Leftrightarrow f'(x) = xf'(1) + 2\frac{f(x)}{x}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(1) + 2\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = f'(1) + 2\frac{x\left(xf'(1) + 2\frac{f(x)}{x}\right) - f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \\ f''(x) &= f'(1) + 2\frac{x^2f'(1) + 2f(x) - f(x)}{x^2} = f'(1) + 2f'(1) + \frac{2f(x)}{x^2} = 3f'(1) + \frac{2f(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Όμοια παραγωγίζοντας ως προς x $f''(y) = 3f'(1) + 2\frac{f(y)}{y^2}$

$$\text{Άρα } f''(x) - f''(y) = \cancel{3f'(1)} + \frac{2f(x)}{x^2} - \cancel{3f'(1)} - \frac{2f(y)}{y^2} = \frac{2f(x)}{x^2} - \frac{2f(y)}{y^2}$$

- 38.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} , για την οποία ισχύει: $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(vx) = ve^{(v-1)x}f(x)$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(0) = 0$.

c) $f'(x) = f(x) + 2e^x$.

Λύση

a) Επειδή θέλουμε να δείξουμε τη σχέση $f(vx) = ve^{(v-1)x}f(x)$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$, θα το

αποδείξουμε με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής.

Για $v=1$ είναι $f(1 \cdot x) = 1 \cdot e^0 f(x) \Leftrightarrow f(x) = f(x)$. Έστω ότι ισχύει για $v = k \in \mathbb{N}$,

δηλαδή $f(kx) = ke^{(k-1)x}f(x)$, (1). Θα δείξουμε ότι ισχύει για $v = k+1$, δηλαδή

$$f[(k+1)x] = (k+1)e^{kx}f(x).$$

$$\text{Πράγματι, } f[(k+1)x] = f(kx + x) = e^{kx}f(x) + e^x f(kx) \stackrel{(1)}{=} e^{kx}f(x) + e^x ke^{(k-1)x}f(x) = \\ e^{kx}f(x) + ke^{x+kx-x}f(x) = e^{kx}f(x) + ke^{kx}f(x) = (k+1)e^{kx}f(x).$$

b) Θέτουμε στην $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, (2), $x=y=0$, οπότε:

$$f(0) = e^0 f(0) + e^0 f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

γ) Παραγωγίζουμε την (2) ως προς x , θεωρώντας το y σταθερά, οπότε:

$$f'(x+y)(x+y)' = e^x f(y) + e^y f'(x) \Leftrightarrow f'(x+y) = e^x f(y) + e^y f'(x), \quad (3). \quad \text{Επίσης,}$$

παραγωγίζουμε την (2) ως προς y , θεωρώντας το x σταθερά, οπότε:

$$f'(x+y) = e^x f'(y) + e^y f(x) \quad (4).$$

$$\text{Από (3), (4), προκύπτει } e^x f(y) + e^y f'(x) = e^x f'(y) + e^y f(x).$$

Θέτοντας όπου $y=0$, είναι:

$$e^x f(0) + e^0 f'(x) = e^x f'(0) + e^0 f(x) \Leftrightarrow f'(x) = 2e^x + f(x)$$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει

$$f(x-y) = f(x)f(y) + \eta \mu \eta \mu \text{ για κάθε } x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{Να αποδείξετε ότι:}$$

a) $f(0) = 1$

β) $f^2(x) = \sigma v^2 x$

γ) Η f είναι άρτια

δ) $f(2x) = f^2(x) - \eta \mu^2 x$

ε) $f(x) = \sigma v x$

σι) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Λύση

a) Για $x=y=0$ είναι $f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ που απορρίπτεται ή $f(0) = 1$.

β) Για $y=x$ έχουμε: $f(0) = f(x)f(x) + \eta \mu^2 x \Leftrightarrow 1 - \eta \mu^2 x = f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) = \sigma v^2 x$

γ) Για $x=0$ είναι: $f(-y) = f(0)f(y) \Leftrightarrow f(-y) = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι άρτια.

δ) Για $y=-x$ έχουμε: $f(2x) = f(x)f(-x) + \eta \mu x \eta \mu (-x) \Leftrightarrow f(2x) = f(x)f(x) - \eta \mu^2 x \Leftrightarrow f(2x) = f^2(x) - \eta \mu^2 x$.

ε) Επειδή $f^2(x) = \sin^2 x \neq 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσωπο στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή $f(0) = 1$, είναι $f(x) > 0$ áρα $f(x) = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

στ) $f'(x) = -\eta \mu x$, áρα $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\eta \mu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

40. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ και $f'(1) = 1$.

Λύση

Για $x = y = 1$ είναι: $f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$.

Παραγωγίζοντας ως προς x , έχουμε: $f'(xy) \cdot (xy)' = f'(x) + 0 \Leftrightarrow f'(xy) \cdot y = f'(x)$.

Για $y = \frac{1}{x}$, προκύπτει: $f'\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} = f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = f'(1) \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

$f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$, áρα $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

41. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) - 6xy$ για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 12$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

β) Να βρείτε την f .

Λύση

$$\text{α)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) - 6x_0 h - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} - 6x_0 \right) = 12 - 6x_0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 12 - 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x) = 12 - 6x$ ή $f'(x) = (12x - 3x^2)' \Leftrightarrow f(x) = 12x - 3x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Η σχέση (1) για $x = y = 0$ γίνεται: $f(0) = f(0) + f(0) - 6 \cdot 0 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Όμως $f(0) = c$, áρα $c = 0$ και $f(x) = 12x - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

42. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 1$

ii. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

b) Να βρείτε το πρόσημο της f .

c) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

d) Να βρείτε την f .

Λύση

a) i) $x = y = 0 : f(0) = 1$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0)f(h)] = f(x_0)f(0) = f(x_0)$$

b) f συνεχής και $f(x) \neq 0$ αφού $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$.

$$\text{γ)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)f(h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \frac{(f(h) - 1)}{h} = f(x_0)f'(0) = f(x_0) \text{ áρα } f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

d) $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$ και επειδή $f(0) = 1$, είναι $c = 1$, áρα $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

43. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(f(x) + y) = x + f(y) \quad (1) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Να αποδείξετε ότι:

i. η f είναι 1-1

ii. $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Αν $f'(0) = 1$, να βρείτε την f .

Λύση

a) i) Εστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) + y = f(x_2) + y \Rightarrow f(f(x_1) + y) = f(f(x_2) + y) \Leftrightarrow x_1 + f(y) = x_2 + f(y) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

ii) Για $x = y = 0$ $f(f(0) + 0) = 0 + f(0) \Leftrightarrow f(f(0)) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

Οπότε στην (1) για $y = 0$ $f(f(x)) = x + f(0) \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = x$

iii) Στην (1) όπου x το $f(x)$, έχουμε:

$$f(f(f(x)) + y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (2)$$

b) Παραγωγίζοντας τη (2) ως προς y , έχουμε: $f'(x+y) = 0 + f'(y)$ και για $y = 0$, είναι:

$$f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = x + c.$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ αρα } f(x) = x, x \in \mathbb{R}$$

44. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

a) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ εφάπτεται και της C_g όπου $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

b) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = f(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$.

γ) Ο τύπος της f είναι $f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$.

Λύση

a) Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = 0$. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

Η εφαπτομένη της C_f είναι η $y = x$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Για να εφάπτεται στη C_g πρέπει να υπάρχει σημείο $A(x_1, g(x_1))$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_1) = 1 \Leftrightarrow 3x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_1 = \frac{1}{3}$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $x = 1$ είναι η $y = x$ και στο $x = \frac{1}{3}$ είναι η $y = x + \frac{4}{27}$

Επομένως η f εφάπτεται της C_g στο $x_1 = 1$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h f(x_0) + e^{x_0} f(h) - f(x_0)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x_0) \frac{e^h - 1}{h} + e^{x_0} \frac{f(h)}{h} \right) = f(x_0) + e^{x_0}$$

$$\text{Αν } g(x) = e^x, \text{ τότε } g'(x) = e^x, g'(0) = 1 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = f(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$.

γ) $f'(x) - f(x) = e^x \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (x)' \Leftrightarrow$

$$e^{-x} f(x) = x + c \Leftrightarrow f(x) = (x + c)e^x, f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ και } f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$$

45. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x)e^{2y} + f(y)e^{2x} + e^{2x+2y} - 1 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } f'(0) = -1.$$

a) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2f(x) + e^{2x}, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

δ) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha + 1)e^{2\alpha}(\beta - \alpha) \leq \beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha} \leq (2\beta + 1)e^{2\beta}(\beta - \alpha)$ για κάθε

$a, b \in (0, +\infty)$.

Λύση

- α)** Στην σχέση $f(x+y) = f(x)e^{2y} + f(y)e^{2x} + e^{2x+2y} - 1$ (1) για $x=y=0$ έχουμε:
 $f(0) = f(0) + f(0) + e^0 - 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

- β)** Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x οπότε έχουμε $f'(x+y) = f'(x)e^{2y} + 2e^{2x}f(y) + 2e^{2x+2y}$
και θέτοντας $x=0$ έχουμε $f'(y) = f'(0)e^{2y} + 2e^0f(y) + 2e^{2y} \Leftrightarrow$
 $f'(y) = -e^{2y} + 2f(y) + 2e^{2y} \Leftrightarrow f'(y) = 2f(y) + e^{2y}$ άρα και $f'(x) = 2f(x) + e^{2x}$.

- γ)** Είναι $f'(x) - 2f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = 1 \Leftrightarrow$
 $(e^{-2x}f(x))' = (x)' \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) = x + C$.
Για $x=0$: $f(0) = c \Leftrightarrow c = 0$ άρα $f(x) = xe^{2x}$.

- δ)** Αν $\alpha < \beta$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$,
οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.
Όμως $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$ και $f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} = 4e^{2x} + 4xe^{2x} > 0$
αφού $x \in (0, +\infty)$ οπότε $f' \uparrow$
Είναι $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow e^{2\alpha}(1+2\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < e^{2\beta}(1+2\beta) \Leftrightarrow$
 $(\beta - \alpha)e^{2\alpha}(1+2\alpha) < \beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha} < e^{2\beta}(1+2\beta)(\beta - \alpha)$
Όμοια αν $\alpha > \beta$ και για $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα. Οπότε για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ είναι
 $e^{2\alpha}(1+2\alpha)(\beta - \alpha) \leq \beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha} \leq e^{2\beta}(1+2\beta)(\beta - \alpha)$.

- 46.** Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\rho > 0$. Αν $f(xy) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y > 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.
- ii. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$.
- iii. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.
- iv. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $xf'(x)f(\rho) = \rho f'(\rho)f(x)$ για κάθε $x > 0$.

β) Αν $f(\rho) = \sqrt{\rho}$ και $f'(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}$, να βρείτε την f .

Λύση

- α)** i. Για $y=1$ και $x>0$ είναι $f(x) = f(x)f(1) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Rightarrow} f(1) = 1$

iii. Για $y = \frac{1}{x}$ έχουμε

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

iii. f συνεχής και $f(x) \neq 0$ και αφού $f(1) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ για $x \in (0, +\infty)$ και $f(0) = 0$ áρα $f(x) \geq 0$ για $x \geq 0$.

iv. Είναι $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$. Για $x = x_0 \frac{h}{p}$, $h \neq p$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f\left(x_0 \frac{h}{p}\right) - f(x_0)}{x_0 \frac{h}{p} - x_0} = \frac{f(x_0) \cdot f\left(\frac{h}{p}\right) - f(x_0)}{x_0(h-p)} = \frac{pf(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f\left(\frac{h}{p}\right) - 1}{h-p} = \\ &= \frac{pf(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h)f\left(\frac{1}{p}\right) - 1}{h-p} = \frac{pf(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h)\frac{1}{f(p)} - 1}{h-p} = \frac{pf(x_0)}{x_0 f(p)} \cdot \frac{f(h) - f(p)}{h-p} \end{aligned}$$

άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{pf(x_0)}{x_0 f(p)} f'(p) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{pf(x_0)}{x_0 f(p)} f'(p)$ για κάθε $x_0 > 0$,

άρα $xf'(x)f(p) = pf'(p)f(x)$ για κάθε $x > 0$.

β) Είναι $xf'(x)f(p) = pf'(p)f(x) \Leftrightarrow xf'(x)\sqrt{p} = p \frac{1}{2\sqrt{p}} f(x) \Leftrightarrow 2xf'(x) = p/f(x) \Leftrightarrow$
 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln \sqrt{x} + c$. Για $x = 1$ είναι $\ln f(1) = \ln \sqrt{1} + c \Leftrightarrow \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0$ áρα
 $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

47. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(xy) = x^2f(y) + y^2f(x)$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ : $y = x + 3$.

α) Να βρείτε το $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(xy) - f(x)}{xy - x} = \frac{2f(x)}{x} + x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$x^2f'(x) = 2xf(x) + x^3.$$

δ) Να βρείτε την f .

ε) Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Λύση

a) Για $x = y = 1$, $f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$.

$$\begin{aligned}\textbf{b)} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(xy) - f(x)}{xy - x} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^2 f(y) + y^2 f(x) - f(x)}{x(y-1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \left[x \frac{f(y)}{y-1} + \frac{f(x)(y^2 - 1)}{x(y-1)} \right] = \\ &= xf'(1) + 2 \frac{f(x)}{x} = \frac{2f(x)}{x} + x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{γ)} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x=x_0h}{=} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0h) - f(x_0)}{x_0h - x_0} \stackrel{(β)}{=} \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0 \\ \text{άρα } f'(x) &= \frac{2f(x)}{x} + x \Leftrightarrow xf'(x) = 2f(x) + x^2 \text{ και για } x > 0 \quad x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3.\end{aligned}$$

$$\textbf{δ)} \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} c = 0 \text{ άρα } f(x) = x^2 \ln x.$$

ε) Για $\lambda > 1$ το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\begin{aligned}E(\lambda) &= \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \ln x \left(\frac{x^3}{3} \right)' dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x} \frac{x^2}{3} dx = \frac{\lambda^3 \ln \lambda}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^\lambda \Leftrightarrow \\ E(\lambda) &= \frac{3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1}{9} = \frac{\lambda^3 (3 \ln \lambda - 1) + 1}{3}. \text{ Άρα } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^3 (3 \ln \lambda - 1) + 1}{9} = +\infty.\end{aligned}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

48. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) - f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

- α) $f(0) = 0$ β) f άρτια γ) $f(x-y) = f(x) - f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$
δ) Η f είναι σταθερή συνάρτηση

49. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = xf(y) - yf(x) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

- α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.
γ) $f(x-y) = yf(x) - xf(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x)f(y) + xy - 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = 1$ β) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}^*$ γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{x}{y} - 1$, $x, y \in \mathbb{R}^*$

51. Άνευ $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι :

- α) $f(1) = 0$ β) f σταθερή

52. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = 2f(x) + f(y) + 2x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y' .
β) Να βρείτε τον τύπο της f .

53. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+y) = xf(y) - yf(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.
γ) $f(x-y) = yf(x) - xf(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

54. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x-y) - f(x+y) = f(x)f(y)$ (1)
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

- α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων
β) Η f είναι άρτια
γ) $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

55. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) + f(x-y) = 4xf(y) + 3x - 6xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Να βρείτε το $f(0)$

b) Να βρείτε τον τύπο της f .

56. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(xy) = \frac{1}{6}f(x)f(y) + \frac{5}{2}xy - x^2y^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$.

b) Να βρεθεί ο τύπος της f .

57. Να βρείτε τις συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

a) $f(x+y) + f(x-y) = 3f(x) + f(y) - 2x - 2y, \quad x, y \in \mathbb{R}$

b) $f(xy) = 2f(x) \ln \frac{x}{y}, \quad x, y > 0$

58. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$3f(xy) - f(x)f(yz) - 16 \geq -5f(xz), \text{ για κάθε } x, y, z \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

a) $f(1) = 4$

b) $f(x) = 4, \quad x \in \mathbb{R}$

59. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

a) $f(0) = 0$

b) Η f είναι περιπτώση

γ) Αν η f έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε είναι συνάρτηση 1-1.

δ) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

60. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1. \text{ Να υπολογίσετε το}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

61. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $(x+y) = 2f(x) + 2f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

62. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

63. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

64. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 1$ για την οποία ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

65. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) \neq 0. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

a) αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

b) αν η f είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq 0$, τότε η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

66. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x)[f(y)+y] + y$

Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

67. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x-y) = f(x)e^y - f(y)e^x - 3xy$ για

$$\text{κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3xe^x}{x} = e. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

a) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

b) Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R}

68. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) - f(y)$ για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

69. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$ για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

70. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = 5$ και

$$f(x+y) = f(x)\sigma_{uv} + f(y)\sigma_{vu}, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

71. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(a+b) = f(a)f(b)$ για

κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1+xg(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι

παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = f(x)$.

72. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy(x+y) + 1$

$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 1. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}.$$

73. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \text{ και } f(x)f(y) \neq 1 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

- 74.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* .
- 75.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, για την οποία ισχύει ότι $f(a+b)+a+b = (f(a)+a)(f(b)+b)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.
- a)** Να βρείτε το $f(0)$.
- b)** Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = (f(x)+x)(f'(0)+1)-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 76.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y) = f(x)f(y)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- a)** $f(0) = 1$
- b)** Αν f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
- c)** Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει $f'(0) = 1$, τότε f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 77.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f'(y) = 0$.
- 78.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση, $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - yf'(y) = 0$, για κάθε $x, y > 0$.
- 79.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- 80.** Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$.
- 81.** Να βρείτε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 0$.
- 82.** Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$.
- 83.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $f'(0) = 2$ και $f(k+x) = f(k)f(x)e^{2kx}$ για κάθε $x, k \in \mathbb{R}$.
- a)** Να αποδείξετε ότι:
- $f(0) = 1$
 - $f'(x) = 2f(x)(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

β) Να βρείτε την f .

Στέλιος Μιχαήλογλου

askisopolis