3ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2016

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, τότε θα παρουσιάζει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο.

β) Αν $f(x)>0$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $\delta>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$.

γ) Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α,β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

δ) Η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1=x_2$ είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

ε) Για να είναι το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ σημείο καμπής της C_f, αρκεί η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2-3x+2)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y.

Μονάδες 6

Β.4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}-x\right)=0$.

Γ1. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+5}{x+1}$.

Γ2. Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 5

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=2$.

Μονάδες 5

Γ5. Ένα υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 3cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,5)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$. Έστω G παράγουσα της $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο $(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η G είναι κυρτή.

Μονάδες 5

Δ2. $\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{f(x)}{x}dx<\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\frac{f(x)}{x}dx$ με $0<\alpha<\beta$.

Μονάδες 4

Δ3. Η εξίσωση $e^x f(x)=x$ έχει το πολύ μια θετική ρίζα.

Μονάδες 4

Δ4. $f(x)\le f'(1)x$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Μονάδες 4

Δ5. $(x+1)f(x)<xf(x+1)$.

Μονάδες 4

Δ6. $\displaystyle\int_1^2\left[G(x)+f(x)\right]dx=0$ αν γνωρίζετε ότι $G(1)=2G(2)$.

Μονάδες 4

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$.(2)

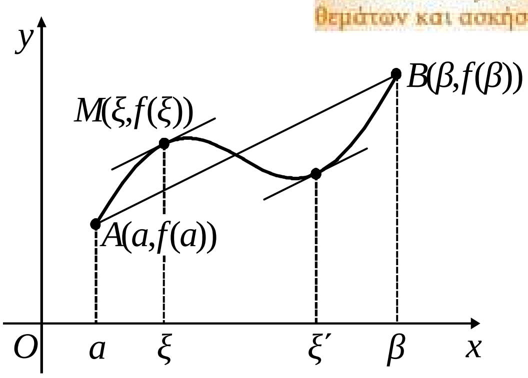
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(2x+\ln\left(x^2+1\right)\right)'=2+\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

Το τριώνυμο x^2+x+1 έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$, άρα $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)>0$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β2.

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow$$

$$2x^2-2(3x-2)=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$$

$$2x^2+\ln\left[\left(x^2\right)^2+1\right]=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]+2(3x-2)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f(3x-2)\ (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και 1-1, οπότε η (1) γίνεται:

$x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $\chi=2$

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\left(2+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=2\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

Είναι $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow 2\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0\overset{\left(x^2+1\right)^2>0}{\Leftrightarrow} 1-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1\Leftrightarrow |x|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Για κάθε $x<-1$ ή $x>1$ είναι $f''(x)<0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[-1,1]$.

Είναι $f(-1)=-2+\ln 2,\ f(1)=2+\ln 2$

Η f έχει σημεία καμπής τα $A(-1,-2+\ln 2)$ και $B(1,2+\ln 2)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f			Σ.Κ		Σ.Κ		

Είναι $f'(-1)=2+\dfrac{-2}{2}=1,\ f'(1)=2+\dfrac{2}{2}=3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία ε_1 με εξίσωση $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow$
$y=x+\ln 2-1$

Η εφαπτομένη της C_f στο B είναι η ευθεία ε_2 με εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$
$y=3x+\ln 2-1$

Για $x=0$ και στις δύο εφαπτομένες προκύπτει $y=\ln 2-1$, οπότε οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0,\ln 2-1)$ που βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

B4. $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1} x\left(2x+\ln\left(x^2+1\right)\right)dx=\int_{-1}^{1} 2x^2dx+\int_{-1}^{1} x\ln\left(x^2+1\right)dx\Leftrightarrow$

$$I=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx\Leftrightarrow$$

$$I=2\left[\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[\frac{x^2+1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{4}{3}+\frac{2}{2}\ln 2-\frac{2}{2}\ln 2-\int_{-1}^{1}xdx=\frac{4}{3}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $f(x)-x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}-x=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}+x,\ x>0$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$.

Για να είναι η ευθεία $y=x+1$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ πρέπει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-1\right)=0\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}+x-x-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-1+x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right]=0\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-1+\frac{\eta\mu\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right]=0\Leftrightarrow 0-1+1=0 \text{ ισχύει}$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x^2}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Γ2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-1\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^2+\beta x+5}{x+1}-x-1\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2+\beta x+5-x^2-2x-1}{x+1}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^2+(\beta-2)x+4}{x+1}=0$.

Αν $\alpha\neq1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^2+(\beta-2)x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha-1)x=\pm\infty$, άρα για

να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^2+(\beta-2)x+4}{x+1}=0$ πρέπει $\alpha=1$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^2+(\beta-2)x+4}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\beta-2)x+4}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left[(\beta-2)+\frac{4}{x}\right]}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\beta-2,\text{ άρα}$$

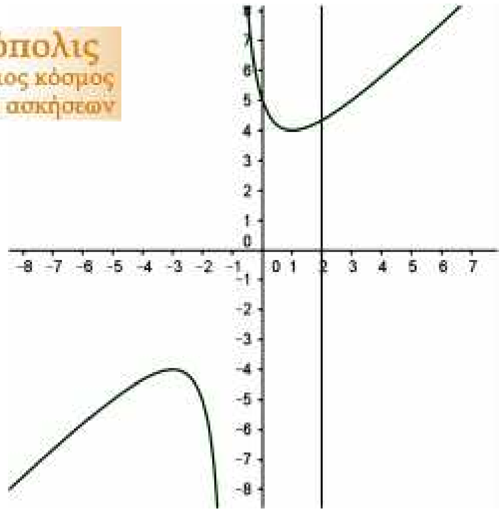
$\beta-2=0\Leftrightarrow\beta=2$.

Γ3. Είναι $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ και $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

x	$-\infty$ ... -3	-3 ... -1	-1 ... 1	1 ... $+\infty$
x^2+2x-3	+	-	-	+
$(x+1)^2$	+	+	+	+
f'	+	-	-	+
f	↗	↘	↘	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-3]$ και $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-3,-1)$ και $(-1,1]$.
Έχει τοπικό μέγιστο το $f(-3)=-4$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1)=4$.

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδό είναι



$$E=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{x^2+2x+5}{x+1}dx\Leftrightarrow$$

$$E=\int_0^2\frac{x^2+2x+1+4}{x+1}dx=\int_0^2\frac{(x+1)^2+4}{x+1}dx\Leftrightarrow$$

$$E=\int_0^2\left(x+1+\frac{4}{x+1}\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E=\left[\frac{x^2}{2}+x+4\ln(x+1)\right]_0^2=4+4\ln3$$

Γ5. Έστω $M(x(t),y(t))$, $t\geq0$, το σημείο, με $x'(t)=3cm/sec$.

Είναι $y(t)=\dfrac{x^2(t)+2x(t)+5}{x(t)+1}$ και $y'(t)=\dfrac{x^2(t)+2x(t)-3}{(x(t)+1)^2}x'(t)$

Έστω ότι το Μ διέρχεται από το Α τη χρονική στιγμή $t=t_0$, τότε $x(t_0)=0$ και

$$y'(t_0)=\frac{x^2(t_0)+2x(t_0)-3}{x(t_0)+1}x'(t_0)=\frac{-3}{1}\cdot3=-9cm/sec$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$, $x>0$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο

$[0,+\infty)$, οπότε: $0<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}<f'(x) \Leftrightarrow$

$f(x)<xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>0 \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$

Δ2. $\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{f(x)}{x}dx<\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{f(x)}{x}dx \Leftrightarrow G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)<G(\beta)-G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στα $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, με $G'(x)=g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε

$$G'(\xi_1)=\frac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$G'(\xi_2)=\frac{G(\beta)-G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{G(\beta)-G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $\xi_1<\xi_2 \overset{G'\nearrow}{\Leftrightarrow} G'(\xi_1)<G'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\dfrac{G(\beta)-G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$

$G\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)<G(\beta)-G\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Δ3. $e^x f(x)=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow g(x)-e^{-x}=0$.

Έστω $h(x)=g(x)-e^{-x}$, $x>0$. Είναι $h'(x)=g'(x)+e^{-x}>0 \Rightarrow h\nearrow(0,+\infty)$, Οπότε η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow g(x)-e^{-x}=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Δ4. Έστω $\varphi(x)=f(x)-f'(1)x,\ x\in[0,1]$. Είναι $\varphi'(x)=f'(x)-f'(1)$.

Για κάθε $0<x<1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x)-f'(1)<0 \Rightarrow \varphi'(x)<0 \Rightarrow \varphi\searrow[0,1]$.

Για κάθε $0\le x\le 1 \overset{\varphi\searrow}{\Rightarrow} \varphi(x)\le\varphi(0) \Leftrightarrow f(x)-f'(1)x\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le f'(1)x$.

Δ5. Για κάθε $0<x<x+1 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x)<g(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{f(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)f(x)<xf(x+1)$.

Δ6. $\displaystyle\int_1^2[G(x)+f(x)]dx=\int_1^2 G(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x)'G(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=$

$$[xG(x)]_1^2-\int_1^2 xG'(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=2G(2)-G(1)-\int_1^2 \cancel{x}\frac{f(x)}{\cancel{x}}dx+\int_1^2 f(x)dx=0$$