28η Άσκηση

Λογαριθμική συνάρτηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\log(x-1))$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log 18$.

γ) Να δείξετε ότι $10^{f(5)}+10^{f(7)}-10^{f(9)}=10^{f(4)}$

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+7)-f(x+1)>\log 2$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $10^{f(x)}+f(x)=1$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ και $\log(x-1)>0 \Leftrightarrow x-1>1 \Leftrightarrow x>2$. Άρα $D_f=(2,+\infty)$

β) $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log 18 \Leftrightarrow$

$3\log(\log 100)+2\log(\log 1000)=\log(\log 10000)+\log 18 \Leftrightarrow$

$3\log(\log 10^2)+2\log(\log 10^3)=\log(\log 10^4)+\log 18 \Leftrightarrow$

$3\log 2+2\log 3=\log 4+\log 18 \Leftrightarrow$

$\log 2^3+\log 3^2=\log(4\cdot 18) \Leftrightarrow$

$\log 8+\log 9=\log 72 \Leftrightarrow$

$\log(8\cdot 9)=\log 72$ ισχύει

γ) $10^{f(5)}+10^{f(7)}-10^{f(9)}=10^{f(4)} \Leftrightarrow$

$10^{\log(\log 4)}+10^{\log(\log 6)}-10^{\log(\log 8)}=10^{\log(\log 3)} \Leftrightarrow$

$\log 4+\log 6-\log 8=\log 3 \Leftrightarrow$

$\log(4\cdot 6)-\log 8=\log 3 \Leftrightarrow \log\dfrac{24}{8}=\log 3$ ισχύει

δ) $f(x)=0 \Leftrightarrow \log(\log(x-1))=0 \Leftrightarrow \log(x-1)=1 \Leftrightarrow x-1=10 \Leftrightarrow x=11$.

Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(11,0)$

ε) Πρέπει $\begin{cases} x+7>2 \\ x+1>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$.

$f(x+7)-f(x+1)>\log 2 \Leftrightarrow \log(\log(x+6))-\log(\log(x))>\log 2 \Leftrightarrow$

$\log\dfrac{\log(x+6)}{\log x}>\log 2 \overset{\log x \nearrow}{\Leftrightarrow} \dfrac{\log(x+6)}{\log x}>2 \Leftrightarrow \log(x+6)>2\log x \Leftrightarrow$

$\log(x+6)>\log x^2 \overset{\log x \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<x+6 \Leftrightarrow x^2-x-6<0 \Leftrightarrow -2<x<3$ και επειδή $x>1$, τελικά $x\in(1,3)$.

στ) $10^{f(x)}+f(x)=1 \Leftrightarrow 10^{\log(\log(x-1))}+\log(\log(x-1))=1 \Leftrightarrow \log(x-1)+\log(\log(x-1))=1 \Leftrightarrow$

$\log((x-1)\log(x-1))=\log 10 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} (x-1)\log(x-1)=10\cdot 1 \Leftrightarrow (x-1)\log(x-1)=10\log 10$ (1)

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x\log x,\ x>1$

Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $\log x_1<\log x_2$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη,

$(x_1,x_2>1 \Rightarrow \log x_1>0, \log x_2>0)$ έχουμε: $x_1\log x_1<x_2\log x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g\nearrow(1,+\infty)$.

Η (1) γίνεται: $g(x-1)=g(10) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x-1=10 \Leftrightarrow x=11$