7η Άσκηση

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x|x|$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}+f^{-1}(x)-2}{x-1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^3}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}$

δ) Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $h(x)=(f\circ g)(x)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν $h(x)=(g\circ f)(x)$, $x>0$, να αποδείξετε ότι $(f^{-1}\circ g)(x)=(g\circ f^{-1})(x)$, $x>0$.

ε) Αν για τη συνάρτηση φ ισχύει ότι: $f(x)+4x\le\varphi(x)\le 3f(x)+2$, για κάθε $x>-3$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$

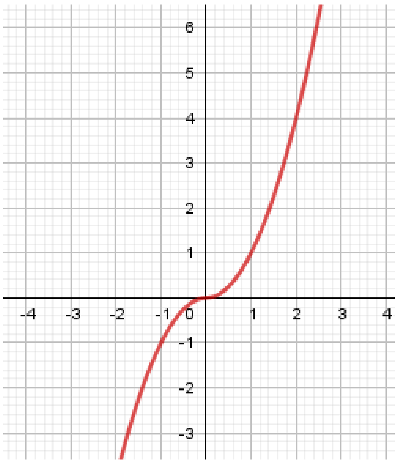
ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\varphi(x)-5}{x-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|\varphi(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{\varphi(x)+4}-3}{\sqrt{2\varphi(x)-6}-2}$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$



β) Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ άρα f 1-1 στο $[0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ τότε $x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(-\infty,0)$ άρα η f είναι 1-1 στο $(-\infty,0)$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x^2=y\geq 0 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{y}$

Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow -x^2=y<0\Leftrightarrow x^2=-y \overset{x<0}{\Leftrightarrow} x=-\sqrt{-y}$.

Στο διάστημα $A_1=(-\infty,0)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(-\infty,0)$ και στο διάστημα $A_2=[0,+\infty)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=[0,+\infty)$.

Επειδή $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται με

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} \sqrt{y}, & y\geq 0 \\ -\sqrt{-y}, & y<0 \end{cases}, \text{ άρα } f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x<0 \end{cases}.$$

γ) i. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}+f^{-1}(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}-2}{x-1}=\lim\limits_{\omega\to1}\dfrac{\omega^4+\omega^3-2}{\omega^6-1}=$

$\lim\limits_{\omega\to1}\dfrac{\cancel{(\omega-1)}(\omega^3+2\omega^2+2\omega+2)}{\cancel{(\omega-1)}(\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)}=\dfrac{7}{6}$

Θέτουμε $\sqrt[6]{x}=\omega\Leftrightarrow x=\omega^6$

$\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=\omega^3\Leftrightarrow\sqrt{x}=\omega^3$

$\left(\sqrt[6]{x}\right)^4=\omega^4\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}=\omega^4$

όταν $x\to1$ τότε $\omega\to1$

ii. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=1\cdot(+\infty)=+\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot x\right)=1\cdot0=0$,

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu(-x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\dfrac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot x\right)=-1\cdot0=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}=0$

δ) i. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $g(x_1)\geq g(x_2)$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ ισχύει ότι $f(g(x_1))\geq f(g(x_2))\Leftrightarrow h(x_1)\geq h(x_2)$ που είναι άτοπο αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Άρα $g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$.

ii. $h(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)$ άρα και $f^{-1}\left(f\left(g(x)\right)\right)=f^{-1}\left(g\left(f(x)\right)\right)\Leftrightarrow$

$g(x)=f^{-1}\left(g\left(f(x)\right)\right)$ και αντικαθιστώντας όπου x το $f^{-1}(x)$ προκύπτει:

$g\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(g\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=\left(g\circ f^{-1}\right)(x)$

ε) Για κάθε $x>0$ είναι $x^2+4x\le\varphi(x)\le 3x^2+2$.

i. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+4x\right)=5$, $\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2+2\right)=5$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=5$

ii. $x^2+4x\le\varphi(x)\le3x^2+2\Leftrightarrow x^2+4x-5\le\varphi(x)-5\le3x^2-3$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}\ge\dfrac{\varphi(x)-5}{x-1}\ge\dfrac{3x^2-3}{x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=6$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x^2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=6$ οπότε από το

Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\varphi(x)-5}{x-1}=6\ (1)$.

Για κάθε $x>1$ είναι $\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}\le\dfrac{\varphi(x)-5}{x-1}\le\dfrac{3x^2-3}{x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=6$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x^2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=6$ οπότε από το

Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\varphi(x)-5}{x-1}=6\ (2)$.

Από (1),(2): $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)-5}{x-1}=6$.

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to1}\left(\varphi(x)-1\right)=4>0$ είναι $\varphi(x)-1>0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο 1, οπότε:

$$\lim_{x\to1}\frac{|\varphi(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\varphi(x)-1-4}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(\varphi(x)-5)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(\varphi(x)-5)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-4}=$$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{\varphi(x)-5}{x-1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]=6\cdot4=24$$

iv. $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{\varphi(x)+4}-3}{\sqrt{2\varphi(x)-6}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{\varphi(x)+4}-3\right)\left(\sqrt{\varphi(x)+4}+3\right)\left(\sqrt{2\varphi(x)-6}+2\right)}{\left(\sqrt{2\varphi(x)-6}-2\right)\left(\sqrt{2\varphi(x)-6}+2\right)\left(\sqrt{\varphi(x)+4}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left[\left(\sqrt{\varphi(x)+4}\right)^2-9\right]\left(\sqrt{2\varphi(x)-6}+2\right)}{\left[\left(\sqrt{2\varphi(x)-6}\right)^2-4\right]\left(\sqrt{\varphi(x)+4}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(\varphi(x)-5)\left(\sqrt{2\varphi(x)-6}+2\right)}{(2\varphi(x)-10)\left(\sqrt{\varphi(x)+4}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(\varphi(x)-5)}\left(\sqrt{2\varphi(x)-6}+2\right)}{2\cancel{(\varphi(x)-5)}\left(\sqrt{\varphi(x)+4}+3\right)}=\frac{4}{2\cdot6}=\frac{1}{3}$$