ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

[redacted]

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\ \beta \in \Re$ ισχύει: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A-B)=P(B)-P(A\cap B)$

β. Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$

γ. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση για $\alpha \neq 0$ και $\beta \in \Re$

δ. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$

ε. Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω με $x < 0$ και $y \neq 0$, δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left[\frac{(xy)^3}{xy^6}\right]^{-1} : \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$B = -(2-y)(y-2)+8y$$

$$\Gamma = (1+\omega^2)^2 - (1-\omega^2)^2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι:

α. $A = x$

7 μονάδες

β. $B = (y+2)^2$

5 μονάδες

γ. $\Gamma = 4\omega^2$

6 μονάδες

Β2. Να βρείτε τις τιμές των x, y, ω αν ισχύει $(|A|-1)^2 + B + \Gamma = 0$

7 μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Από τους 200 μαθητές ενός σχολείου που ρωτήθηκαν ως προς τα χόμπι τους οι 160 απάντησαν ότι ασχολούνται με υπολογιστές, οι 60 ότι ασχολούνται με τον αθλητισμό και οι 180 ότι ασχολούνται με υπολογιστές ή με τον αθλητισμό.
Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του σχολείου και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: «Ο μαθητής ασχολείται με τον αθλητισμό»
Β: «Ο μαθητής ασχολείται με υπολογιστές»

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

α. Η πιθανότητα ο μαθητής να έχει και τα δύο παραπάνω χόμπι είναι 0,2

6 μονάδες

β. $P(B') = P(A \cap B)$

3 μονάδες

Γ2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

α. Να ασχολείται μόνο με υπολογιστές.

5 μονάδες

β. Να μην έχει κανένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.

5 μονάδες

Γ3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

α. Να ασχολείται μόνο με ένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.

3 μονάδες

β. Να μην ασχολείται με υπολογιστές ή να μην ασχολείται με τον αθλητισμό.

3 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Για $\alpha \geq 1$ δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left(\sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha - 1}} - \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha - 1}}\right)^2$$

$$B = \left(\sqrt{\alpha} + 1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha} + 1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha} + 1\right)\left(\left(\sqrt[16]{\alpha}\right)^2 - 1\right)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$A = 2\alpha - 2|\alpha - 2|$ και $B = \alpha - 1$

10 μονάδες

Δ2. Για $\alpha \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

α. $|A + B| = \alpha + 3$

4 μονάδες

β. Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του α η εξίσωση $\alpha^2 x = |A + B| + 4x - 1$

5 μονάδες

Δ3. Αν x_0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης του ερωτήματος Δ2.β να αποδείξετε ότι ισχύει $(x_0 - 1)^2 + x_0^2 > (6 - 2\alpha)x_0^2$ για κάθε $\alpha > 2$

6 μονάδες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

[redacted]

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 62.

Α2. **α** → Λάθος **β** → Λάθος **γ** → Σωστό **δ** → Λάθος **ε** → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α.** **1^{ος} τρόπος**

$$A=\left[\frac{(xy)^3}{xy^6}\right]^{-1}:\left(\frac{y}{x}\right)^3=\left[\frac{xy^6}{(xy)^3}\right]^1:\frac{y^3}{x^3}=\frac{xy^6}{(xy)^3}\cdot\frac{x^3}{y^3}=\frac{xy^6x^3}{x^3y^3y^3}=$$

$$=\frac{x^4y^6}{x^3y^6}=\frac{x^4}{x^3}=x$$

2^{ος} τρόπος

$$A=\left[\frac{(xy)^3}{xy^6}\right]^{-1}:\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{\left[(xy)^3\right]^{-1}}{\left(xy^6\right)^{-1}}:\frac{y^3}{x^3}=\frac{(xy)^{-3}}{\left(xy^6\right)^{-1}}\cdot\frac{x^3}{y^3}=\frac{x^{-3}y^{-3}}{x^{-1}y^{-6}}\cdot\frac{x^3}{y^3}=$$

$$=\frac{x^{-3}y^{-3}x^3}{x^{-1}y^{-6}y^3}=\frac{x^0y^{-3}}{x^{-1}y^{-3}}=\frac{1}{x^{-1}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

β. **1^{ος} τρόπος**

$$B=-(2-y)(y-2)+8y=(y-2)(y-2)+8y=(y-2)^2+8y=$$

$$=y^2-4y+4+8y=y^2+4y+4=(y+2)^2$$

2ος τρόπος

$$B=-(2-y)(y-2)+8y=-(2y-4-y^2+2y)+8y=$$
$$=-(4y-y^2-4)+8y=-4y+y^2+4+8y=$$
$$=y^2+4y+4=(y+2)^2$$

γ. **1ος τρόπος**

$$\Gamma=(1+\omega^2)^2-(1-\omega^2)^2=\left[1+\omega^2+1-\omega^2\right]\cdot\left[1+\omega^2-(1-\omega^2)\right]=$$
$$=2(1+\omega^2-1+\omega^2)=2\cdot 2\omega^2=4\omega^2$$

2ος τρόπος

$$\Gamma=(1+\omega^2)^2-(1-\omega^2)^2=1+2\omega^2+(\omega^2)^2-\left[1-2\omega^2+(\omega^2)^2\right]=$$
$$=1+2\omega^2+\omega^4-1+2\omega^2-\omega^4=2\omega^2+2\omega^2=4\omega^2$$

Β2. Ισχύει: $(|A|-1)^2+B+\Gamma=0 \Leftrightarrow$

$$(|x|-1)^2+(y+2)^2+4\omega^2=0 \qquad (1)$$

Επειδή $(|x|-1)^2\geq 0$ και $(y+2)^2\geq 0$ και $4\omega^2\geq 0$ από (1) προκύπτουν:

$$(|x|-1)^2=0\Leftrightarrow |x|-1=0\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow \begin{cases}\boxed{x=-1} & \text{ΔΕΚΤΗ αφού } x<0\\ \text{ή} & \\ x=1 & \text{ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ αφού } x<0\end{cases}$$

και

$$(y+2)^2=0\Leftrightarrow y+2=0\Leftrightarrow \boxed{y=-2}\ \text{ΔΕΚΤΗ}$$

και

$$4\omega^2=0\Leftrightarrow \omega^2=0\Leftrightarrow \boxed{\omega=0}\ \text{ΔΕΚΤΗ}$$

Άρα $(x,\ y,\ \omega)=(-1,\ -2,\ 0)$

ΘΕΜΑ Γ

$A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει ένα τουλάχιστον από τα δύο χόμπι.

Τότε από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{160}{200} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{180}{200} = \frac{9}{10} = 0,9$$

Γ1. **α.** $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει και τα δύο χόμπι.
Από τον προσθετικό νόμο ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$0,9 = 0,3 + 0,8 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 1,1 - 0,9 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,2}$$

β. $P(B') = 1 - P(B) \Leftrightarrow$

$$P(B') = 1 - 0,8 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(B') = 0,2}$$

οπότε $\boxed{P(B') = P(A \cap B)}$

Γ2. **α.** $B - A$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με υπολογιστές.
Τότε:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(B - A) = 0,8 - 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(B - A) = 0,6}$$

β. $(A\cup B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην έχει κανένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.
Τότε:

$$P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B) \Leftrightarrow$$
$$P(A\cup B)' = 1 - 0{,}9 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{P(A\cup B)' = 0{,}1}$$

Γ3. **α.** $(A-B)\cup(B-A)$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με ένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.
Τότε:

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big) \overset{A-B,\ B-A}{\underset{\text{ασυμβίβαστα}}{=}}$$
$$P(A-B) + P(B-A) =$$
$$P(A) - P(A\cap B) + 0{,}6 =$$
$$0{,}3 - 0{,}2 + 0{,}6 = 0{,}7$$
$$\text{Άρα } \boxed{P\big((A-B)\cup(B-A)\big) = 0{,}7}$$

β. $A'\cup B'$ ή $(A\cap B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην ασχολείται με υπολογιστές ή να μην ασχολείται με τον αθλητισμό.

<u>1^{ος} τρόπος</u>

$$P(A'\cup B') = P(A') + P(B') - P(A'\cap B') =$$
$$P(A') + P(B') - P(A'-B) =$$
$$P(A') + P(B') - \big(P(A') - P(A'\cap B)\big) =$$
$$P(A') + P(B') - P(A') + P(A'\cap B) =$$
$$P(B') + P(B) - P(A\cap B) =$$
$$1 - P(A\cap B) =$$
$$1 - 0{,}2 = 0{,}8$$
$$\text{Άρα } \boxed{P(A'\cup B') = 0{,}8}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' =$

$1 - P(A \cap B) =$

$1 - 0,2 = 0,8$

Άρα $\boxed{P(A' \cup B') = 0,8}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $\alpha \geq 1$ έχουμε,

$A = \sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha - 1}}^{\,2} - 2\sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha-1}} \cdot \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}} + \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}}^{\,2} =$

$\alpha - 2\sqrt{\alpha-1} - 2\sqrt{\alpha^2 - \left(2\sqrt{\alpha-1}\right)^2} + \alpha + 2\sqrt{\alpha-1} =$

$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha-1)} =$

$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4} =$

$2\alpha - 2\sqrt{(\alpha-2)^2} =$

$2\alpha - 2|\alpha - 2|$

$B = \left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}-1\right) =$

$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}^{\,2}-1^2\right) =$

$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}-1\right) =$

$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}^{\,2}-1^2\right) =$

$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt{\alpha}-1\right) =$

$\sqrt{\alpha}^{\,2} - 1^2 =$

$\alpha - 1$

Δ2. Αφού $\alpha \geq 2$ είναι $\alpha - 2 \geq 0$. Επομένως $|\alpha - 2| = \alpha - 2$

Άρα $A = 2\alpha - 2(\alpha - 2) = 2\alpha - 2\alpha + 4 = 4$

α. $|A + B| = |4 + \alpha - 1| = |\alpha + 3| = \alpha + 3$ αφού για $\alpha \geq 2$ είναι $\alpha + 3 > 0$

β. Είναι $\alpha^2 x = |A+B| + 4x - 1$ και αφού $|A+B| = \alpha + 3$ είναι

$\alpha^2 x = \alpha + 3 + 4x - 1$ ή

$\alpha^2 x - 4x = \alpha + 2$ ή

$(\alpha^2 - 4)x = \alpha + 2$ ή

$(\alpha + 2)(\alpha - 2)x = \alpha + 2$

Είναι $\alpha \geq 2$ επομένως $\alpha + 2 \neq 0$. Διαιρώντας την τελευταία σχέση με α + 2 έχουμε $(\alpha - 2)x = 1$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha - 2 = 0$ δηλαδή αν α = 2 η εξίσωση γίνεται $0x = 1$ που είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha \neq 2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{1}{\alpha - 2}$

Δ3. **<u>1ος τρόπος</u>**

Είναι $x_0 = \dfrac{1}{\alpha - 2}$ για $\alpha > 2$

Έχουμε $x_0^2 = \left(\dfrac{1}{\alpha - 2}\right)^2 > 0$, για κάθε $\alpha > 2$

Διαιρούμε με $x_0^2 > 0$ και τα δύο μέλη της $(x_0 - 1)^2 + x_0^2 > (6 - 2\alpha)x_0^2$ και έχουμε

$$\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right)^2 + \frac{x_0^2}{x_0^2} > 6 - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 1 - 6 + 2\alpha > 0 \overset{x_0 = \frac{1}{\alpha - 2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[1 - (\alpha - 2)\right]^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha + 2)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3 - \alpha)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$9 - 6\alpha + \alpha^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 2)^2 > 0 \quad \text{που είναι αληθής για } \alpha > 2$$

<u>2ος τρόπος</u>

Για $x_0=\dfrac{1}{\alpha-2}$ έχουμε

$$(x_0-1)^2+x_0^2>(6-2\alpha)x_0^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-\frac{\alpha-2}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2-2(3-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}-\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{2-\alpha}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$(-1)^2>0 \Leftrightarrow$$

$1>0$ που ισχύει

<u>3ος τρόπος</u>

Το 1ο μέλος της δοθείσας σχέσης για $x_0=\dfrac{1}{\alpha-2}$ γίνεται

$$(x_0-1)^2+x_0^2=$$
$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{1-(\alpha-2)}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq \gamma$ ισχύει:

$$(\beta-\gamma)^2>0 \Leftrightarrow \beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2>0 \Leftrightarrow \beta^2+\gamma^2>2\beta\gamma \qquad (2)$$

Έστω $\beta=\dfrac{3-\alpha}{\alpha-2}$ και $\gamma=\dfrac{1}{\alpha-2}$ με $\alpha-2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 2$

Αν $\beta=\gamma \Leftrightarrow \dfrac{3-\alpha}{\alpha-2}=\dfrac{1}{\alpha-2} \Leftrightarrow 3-\alpha=1 \Leftrightarrow 3-1=\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$ άτοπο

Άρα $\beta\neq\gamma$

Τότε για κάθε $\alpha>2$ λόγω της (2), από την (1) έχουμε:

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>2\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>\frac{2(3-\alpha)}{(\alpha-2)^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\frac{1}{(\alpha-2)^2}\overset{x_0=\frac{1}{\alpha-2}}{\Leftrightarrow}$$

$$(x_0-1)^2+x_0^2>(6-2\alpha)x_0^2 \text{ για κάθε } \alpha>2$$