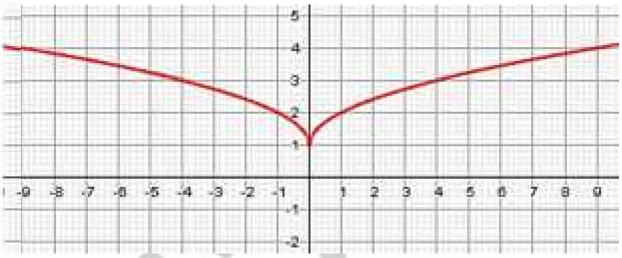
10η Άσκηση

2019-2020

Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε τα ακρότατα της f και να δείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(x^2 + y^2)$ και $f(2xy)$ αν x, y ομόσημοι.

γ) Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(\alpha) + f(\beta) = 2 - (\gamma - 1)^{100}$.

δ) Να λύσετε, μέσω σχήματος, την εξίσωση $xf(x) - 2 = 0$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2) - f(x^4) < f(-x^4) - f(-x^2)$

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \text{συν}x$.

ζ) Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την ανίσωση $f(x) + 2f(x+3) + 3f(x+8) < 20$.

η) Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η $g \circ f$, να δείξετε ότι είναι άρτια.

θ) Να βρείτε τη συνάρτηση f, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $f^2(x) + 1 = 2f(x) + |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f έχει ελάχιστο το 1 για $x=0$, οπότε $f(x)\ge 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy \overset{f\nearrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(x^2+y^2)\ge f(2xy)$.

γ) Είναι $f(\alpha)\ge 1,\ f(\beta)\ge 1$, οπότε $f(\alpha)+f(\beta)\ge 2$, άρα

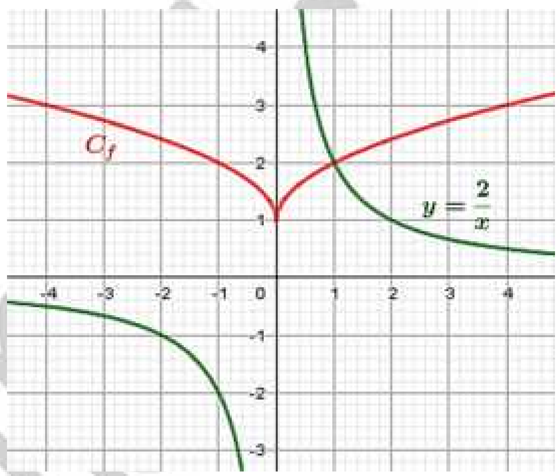
$\cancel{2}-(\gamma-1)^{100}\ge \cancel{2} \Leftrightarrow (\gamma-1)^{100}\le 0 \Leftrightarrow \gamma-1=0 \Leftrightarrow \gamma=1$. Τότε $f(\alpha)+f(\beta)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=1 \\ f(\beta)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$

δ) Αν $x=0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
Για $x\ne 0$ είναι

$xf(x)-2=0 \Leftrightarrow xf(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{x}$.

Λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της υπερβολής $y=\frac{2}{x}$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι κοινό σημείο είναι το $(1,2)$, άρα η λύση της εξίσωσης είναι $x=1$.



ε) Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει ότι $f(-x^2)=f(x^2)$ και $f(-x^4)=f(x^4)$, οπότε:

$f(x^2)-f(x^4)<f(-x^4)-f(-x^2) \Leftrightarrow f(x^2)-f(x^4)<f(x^4)-f(x^2) \Leftrightarrow 2f(x^2)<2f(x^4) \Leftrightarrow$
$f(x^2)<f(x^4)$ (1)

Είναι $x^2\ge 0$, $x^4\ge 0$ και στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε από την (1) προκύπτει: $x^2<x^4 \Leftrightarrow x^4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)>0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

στ) Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ αληθεύει μόνο όταν $f(x)=1=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x=0$.

ζ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+2f(x+3)+3f(x+8),\ x>0$.

Παρατηρούμε ότι $h(1)=f(1)+2f(4)+3f(9)=2+2\cdot 3+3\cdot 4=20$.

Έστω $0<x_1<x_2$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, έχουμε:

$f(x_1)<f(x_2)$ (1) , $x_1+3<x_2+3 \Leftrightarrow f(x_1+3)<f(x_2+3) \Leftrightarrow 2f(x_1+3)<2f(x_2+3)$ (2) ,

$x_1+8<x_2+8 \Leftrightarrow f(x_1+8)<f(x_2+8) \Leftrightarrow 3f(x_1+8)<3f(x_2+8)$ (3)

Από $(1)+(2)+(3) \Rightarrow g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow g\nearrow(0,+\infty)$.

$f(x)+2f(x+3)+3f(x+8)<20 \Leftrightarrow h(x)<h(1) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} x<1$. Άρα $x\in(0,1)$.

η) Είναι $(g\circ f)(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=(g\circ f)(x)$, οπότε η $g\circ f$ είναι άρτια.

θ) $f^2(x)+1=2f(x)+|x| \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=|x| \Leftrightarrow (f(x)-1)^2=|x| \Leftrightarrow |f(x)-1|=\sqrt{|x|}$

Επειδή $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)-1=\sqrt{|x|}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{|x|}+1$.

Αν $x\geq 0$ τότε $f(x)=\sqrt{x}+1$ και αν $x<0$ τότε $f(x)=\sqrt{-x}+1$.

Τελικά $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1, & x\geq 0\\ \sqrt{-x}+1, & x<0\end{cases}$.