

ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

✓ $i^v, v \in \mathbb{N}$

- αν ο v είναι συγκεκριμένος αριθμός, τότε θα θεωρούμε την ευκλείδεια διαίρεση $v:4$ και έστω k το πιο λίγο και u το υπόλοιπο, ισχύει: $v = 4k+u$, $k \in \mathbb{N}$ και $u = 0, 1, 2, 3$, οπότε:

$$i^v = i^{4k+u} = i^{4k} \cdot i^u = (i^4)^\pi \cdot i^u = 1^\pi \cdot i^u = i^u = \begin{cases} 1 & , \alpha v \quad u=0 \\ i & , \alpha v \quad u=1 \\ -1 & , \alpha v \quad u=2 \\ -i & , \alpha v \quad u=3 \end{cases}$$

- αν ο v δεν είναι συγκεκριμένος αριθμός, τότε θέτουμε διαδοχικά: $v = 4k, v = 4k+1, v = 4k+2, v = 4k+3$ και σε κάθε περίπτωση θα υπολογίζουμε τη δύναμη.

✓ Σχέση της μορφής $(\alpha + \beta i)^v + (\beta - \alpha i)^v$

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ή όταν ισχύει μία σχέση της παραπάνω μορφής, τότε πολλαπλασιάζουμε το πραγματικό μέρος ενός από τους δύο μιγαδικούς με $-i^2$ (γιατί $-i^2 = 1$), βγάζουμε κοινό παράγοντα στη παρένθεση αυτή το i ή το $-i$ και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στο ζητούμενο.

✓ Δύναμη μιγαδικού (z^v)

Βρίσκουμε τα z^2, z^3, \dots ώστε να προκύψει αποτέλεσμα με βάση το οποίο να υπολογίζονται όλες οι δυνάμεις του z . Τα συνθησισμένα αποτελέσματα είναι: ± 1 ή $\pm i$ ή $1 \pm i$.

$z \in \mathbb{R}$

➤ Φέρνουμε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$ και διαπιστώνουμε (ή απαιτούμε) $\beta = \operatorname{Im}(z) = 0$,

ή

➤ Αποδεικνύουμε ότι $\bar{z} = z$, γιατί: $z = \bar{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \alpha - \beta i \Leftrightarrow 2\beta i = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,

ή

➤ Αποδεικνύουμε ότι ο z είναι άθροισμα δύο συζυγών, δηλαδή :

$$z = w + \bar{w} = 2\operatorname{Re}(w) \in \mathbb{R}$$

$z \in \mathbb{I}$

➤ Φέρνουμε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$ και διαπιστώνουμε (ή απαιτούμε) $\alpha = \operatorname{Re}(z) = 0$,

ή

➤ Αποδεικνύουμε ότι $\bar{z} = -z$, γιατί:

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow \alpha - \beta i = -\alpha - \beta i \Leftrightarrow 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}, \text{ ή}$$

➤ Αποδεικνύουμε ότι ο z είναι διαφορά δύο συζυγών, δηλαδή :

$$z = w - \bar{w} = 2\operatorname{Im}(w)i \in \mathbb{I}$$

εξισώσεις

➤ $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν $\Delta > 0$ έχει δύο ρίζες $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

- Αν $\Delta = 0$, έχει μία διπλή ρίζα $z = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

- Αν $\Delta < 0$, έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

➤ Εξίσωση της μορφής $f(z, \bar{z}) = 0$

Θέτουμε $z = x + yi$. Κάνουμε πράξεις και χωρίζουμε πραγματικό και φανταστικό μέρος

Απαιτούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος να είναι ίσα με 0. Τέλος λύνουμε σύστημα και βρίσκουμε τα x, y .

7η Κατηγορία: Αντικατάσταση του \bar{z} συναρτήσει του z

Αν ισχύει ότι $|z| = \alpha > 0$, τότε: $|z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = \alpha^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{\alpha^2}{z}$.

Δηλαδή αντικαθιστούμε τον \bar{z} , με $\frac{\alpha^2}{z}$.

Στη περίπτωση που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη αντικατάσταση, συχνά χρησιμοποιούμε και την ιδιότητα $|z| = |\bar{z}|$, έτσι ώστε να εμφανιστεί ο \bar{z} για να μπορεί να γίνει η αντικατάσταση.

8η Κατηγορία: Ισότητα με μεγάλες ή άγνωστες δυνάμεις

Χρησιμοποιούμε την συνεπαγωγή:

$$(\Pi_1(z))^\vee = (\Pi_2(z))^\vee \Rightarrow |(\Pi_1(z))^\vee| = |(\Pi_2(z))^\vee| \Leftrightarrow |\Pi_1(z)|^\vee = |\Pi_2(z)|^\vee \Leftrightarrow |\Pi_1(z)| = |\Pi_2(z)|$$

Προσοχή δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή, αν ισχύει $|(\Pi_1(z))^\vee| = |(\Pi_2(z))^\vee|$, τότε δεν συνεπάγεται ότι $(\Pi_1(z))^\vee = (\Pi_2(z))^\vee$.

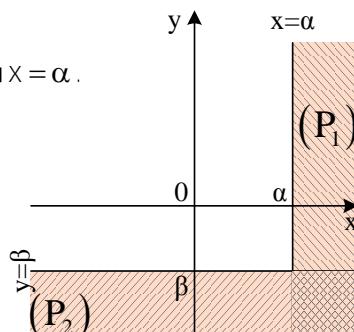
9η Κατηγορία: Ανισοτικές σχέσεις

- Με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε σχέση που ισχύει.
- Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

➤ Ο γ.τ. της εικόνας του z , αν $\operatorname{Re}(z) \geq \alpha, \operatorname{Im}(z) \geq \beta$

- Αν ισχύει $\operatorname{Re}(z) = \alpha$, τότε ο γ.τ. του z είναι η ευθεία $x = \alpha$.
- Αν ισχύει $\operatorname{Re}(z) \geq \alpha$, τότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι το ημιεπίπεδο P_1 .
- Αν είναι $\operatorname{Im}(z) = \beta$, τότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = \beta$.
- Αν δίνεται $\operatorname{Im}(z) \leq \beta$, τότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι το ημιεπίπεδο P_2 .



➤ Ο γ.τ. της εικόνας του z , αν $|z| > \alpha < \rho$

- Αν $|z| < \rho$, ο γ.τ. της εικόνας του z είναι τα εσωτερικά σημεία του κυκλικού δίσκου κέντρου O και ακτίνας ρ .
- Αν $|z| > \rho$ ο γ.τ. της εικόνας του z είναι τα εξωτερικά σημεία του κυκλικού δίσκου κέντρου O και ακτίνας ρ .

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

Αν $\rho_1 < |z| < \rho_2$ ο γ.τ. της εικόνας του z είναι τα εσωτερικά σημεία του κυκλικού δακτυλίου κέντρου O και ακτίνων ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα.

➤ Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Η σχέση $|z - z_1| = |z - z_2|$, με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, δηλώνει ότι ο γεωμετρικός τόπος του z είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB , με A, B τις εικόνες των γνωστών μιγαδικών z_1, z_2 . Η εξίσωση της μεσοκαθέτου μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους:

1^{ος} τρόπος: (Αλγεβρικά)

Θέτουμε $z = x + yi$. Αξιοποιούμε τον ορισμό του μέτρου και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση της μεσοκαθέτου.

2^{ος} τρόπος: (Γεωμετρικά)

Βρίσκουμε το μέσο M του AB και τον συντελεστή

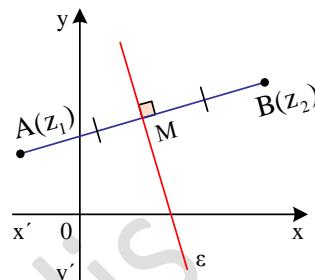
$$\lambda_{AB}. \text{ Είναι } \varepsilon \perp AB, \text{ οπότε } \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{\lambda_{AB}}.$$

Βρίσκουμε την εξίσωση της ε από τη σχέση:

$$y - y_0 = \lambda_\varepsilon(x - x_0).$$

Αν δεν ορίζεται λ , τότε η ευθεία AB είναι της μορφής $x = x_0$, οπότε η ε είναι της μορφής $y = y_0$.

Αν $|z - z_1| \geq |z - z_2|$ τότε ο γ.τ. είναι ένα από τα ημιεπίπεδα που δημιουργεί ή μεσοκάθετος



➤ Αν για τον z ισχύει η σχέση $|\alpha z + z_1| = |\beta z + z_2|$, $\alpha \neq \beta$, τότε με αντικατάσταση $z = x + yi$

καταλήγουμε σε εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, οπότε ο γ.τ. της εικόνας του z είναι κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

➤ Αν για τον z ισχύει η σχέση: $|z - z_0| = \rho$, τότε ο γ.τ. της εικόνας του z είναι κύκλος με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ .

➤ Αν για τον z ισχύει η σχέση: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha$, $2\alpha > |z_1 - z_2|$, τότε ο γ.τ. της εικόνας του z είναι έλλειψη.

➤ Αν για τον z ισχύει η σχέση: $|z - z_1| - |z - z_2| = 2\alpha$, $2\alpha < |z_1 - z_2|$, τότε ο γ.τ. της εικόνας του z είναι κλάδος υπερβολής.

Αν για τον z ισχύει σχέση που περιέχει κάποια από τα $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$, τότε θα θέτουμε στη σχέση $z = x + yi$ και θα καταλήγουμε στην εξίσωση του γεωμετρικού τόπου.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αποσύνθεση

➤ Εύρεση συναρτήσεων που συνθέτουν μία σύνθετη συνάρτηση

Όταν δίνεται μία συνάρτηση f και θέλουμε να την εκφράσουμε ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, τότε, παρατηρώντας τον τύπο της συνάρτησης από «έξω» προς τα «μέσα», προσπαθούμε να βρούμε τις βασικές συναρτήσεις που συνθέτουν την f .

➤ Από την $f \circ g$ και την g , να βρεθεί η f

Θέτουμε $g(x) = \omega$. Λύνουμε την προηγούμενη σχέση ως προς x ή ω προς g μία παράσταση του x , έτσι ώστε να μετατρέψουμε την $(f \circ g)(x)$ στη μορφή $f(\omega)$, με ανεξάρτητη μεταβλητή το ω .

➤ Από την $f \circ g$ και την f , να βρεθεί g

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

Αντικαθιστούμε στην $f(x)$ όπου x το $g(x)$ και βρίσκουμε την $f(g(x))$.

Εξισώνουμε την $f(g(x))$ του προηγούμενου βήματος με την $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ της υπόθεσης και λύνουμε ως προς $g(x)$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης

➤ Σχέσεις της μορφής $\kappa f(\alpha - x) + \lambda f(\beta + x) = g(x)$

Εστω $\alpha - x = \beta + X \Leftrightarrow X = \alpha - \beta - x$:

Αντικαθιστούμε στη σχέση όπου x το X και προκύπτει μία άλλη σχέση που περιέχει τα $f(\alpha - x)$ και $f(\beta + x)$. Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα των δύο σχέσεων για να υπολογίσουμε τα $f(\alpha - x)$ και $f(\beta + x)$. Αν θέσουμε $\alpha - \chi = u$, προσδιορίζουμε το $f(u)$, άρα και το $f(x)$.

➤ Εύρεση τύπου από ανισοτικές σχέσεις

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε τις ανισώσεις: $f(x) \geq g(x)$ και $f(x) \leq g(x)$, από τις οποίες προκύπτει ότι $f(x) = g(x)$.

Εύρεση ακροτάτων

- Αν f έχει σύνολο τιμών $[m, M]$, τότε
έχει ολικό ελάχιστο το m και ολικό μέγιστο το M .
- Αν θέλουμε να βρούμε μόνο το ελάχιστο ή μόνο το μέγιστο της f τότε με διαδοχικές ισοδυναμίες προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τις ανισώσεις $f(x) \geq m$ ή $f(x) \leq M$ αντίστοιχα.

Πρέπει να βρίσκουμε και για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει το ακρότατο λύνοντας την εξίσωση $f(x)=m$ ή $f(x)=M$ αντίστοιχα.

1-1 (Αντιστρέψιμη συνάρτηση)

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι 1-1 σε ένα διάστημα Δ ,

χρησιμοποιούμε κάποιον από τους παρακάτω τρόπους:

- Εστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Στην τελευταία σχέση κάνουμε όλες τις πράξεις και καταλήγουμε στο $x_1 = x_2$.
- Εστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$. Με διαδοχικές συνεπαγωγές επιδιώκουμε να καταλήξουμε στη σχέση $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ , οπότε είναι και 1-1.

Μη αντιστρέψιμη

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη, αρκεί να δείξουμε ότι δεν είναι 1-1 με κάποιον από τους παρακάτω τρόπους:

- Μέσω παρατήρησης βρίσκουμε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Υποθέτουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και με διαδοχικές συνεπαγωγές κατασκευάζουμε το γινόμενο $(x_1 - x_2)\Pi(x_1, x_2) = 0$. Τότε $x_1 = x_2$ ή $\Pi(x_1, x_2) = 0$ (1). Αν στην (1) θέσουμε $x_1 = \alpha$, και προκύψει $x_2 = \beta \neq \alpha$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$ και η f δεν είναι αντιστρέψιμη.
- Αν δίνεται η C_f , τότε αποδεικνύουμε ότι υπάρχει οριζόντια ευθεία που τέμνει τη C_f σε περισσότερα από ένα σημείο.

Λύση εξίσωσης

Για να λύσουμε μία εξίσωση, στην οποία δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις μεθόδους που μάθαμε στις προηγούμενες τάξεις, κάνουμε τα εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1° μέλος και η εξίσωση γίνεται της μορφής $f(x)=0$. Μέσω παρατήρησης, βρίσκουμε μία προφανή ρίζα x_0 της f . Αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f .
- Αν τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι συνθέσεις της ίδιας συνάρτησης, τότε ορίζουμε ως f τη συνάρτηση αυτή και αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1. Τότε η εξίσωση γίνεται: $f(g(x))=f(h(x)) \Leftrightarrow g(x)=h(x) \Leftrightarrow \dots$

Εύρεση αντίστροφης

Για να βρούμε την αντίστροφη μίας συνάρτησης f , ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1.
- Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x .
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f .

Θέτουμε $x=f^{-1}(y)$ και αλλάζουμε μεταβλητές (όπου y το x και αντίστροφα).

ΤΙΜΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ – ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εστω αντιστρέψιμη συνάρτηση f . Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της f ως προς την $y=x$.

Για να βρούμε την τιμή $f^{-1}(\beta)$ της αντίστροφης, θέτουμε $f^{-1}(\beta)=\alpha \Leftrightarrow \beta=f(\alpha)$ και αρκεί να βρούμε για ποια τιμή του x η f έχει τιμή β .

Υπενθυμίζουμε ότι αν $M(\alpha, \beta)$ σημείο της C_f , τότε: $f(\alpha)=\beta$ και $f^{-1}(\beta)=\alpha$.

Η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$, δηλαδή για να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$, αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε τα ζητούμενα σημεία βρίσκονται επί της ευθείας $y=x$. Άρα: $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x$

Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε βρίσκουμε την f^{-1} και λύνουμε απευθείας την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

ΟΡΙΑ

Όριο ρητής $\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$

- Κάνουμε αντικατάσταση όπου x το x_0 για να διαπιστώσουμε αν είναι όριο $\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$.
- Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρανομαστή για να εμφανίζουμε τον παράγοντα $x-x_0$.
- Απλοποιούμε το $(x-x_0)$ και βρίσκουμε το όριο του πολίκου.
- Αν εμφανιστεί πάλι απροσδιοριστία $\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα.

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

Άρρητες

- Άρρητες της μορφής $A \pm \sqrt{B}$, $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$

Αν έχουμε απροσδιοριστία $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή

παράσταση των όρων που περιέχουν τα ριζικά και στη συνέχεια παραγοντοποιούμε και απλοποιούμε.

- Άρρητες της μορφής $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με την παράσταση $\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B^2}$, ώστε να

$$\text{προκύψει η ταυτότητα: } (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B^2}) = (\sqrt[3]{A})^3 - (\sqrt[3]{B})^3 = A - B$$

Και γενικά, αν τα ριζικά είναι της μορφής $\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$, πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους με την

$$\text{παράσταση: } (\sqrt[n]{A})^{n-1} + (\sqrt[n]{A})^{n-2} \sqrt[n]{B} + \dots + (\sqrt[n]{B})^{n-1}$$

- Άρρητες της μορφής $\sqrt{A} + \sqrt{B} - \Gamma$ ή $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} - \Gamma$

Κάνουμε διάσπαση του Γ , στους αριθμούς που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε $x = x_0$ στις ρίζες \sqrt{A} ή $\sqrt[3]{\Gamma}$ ή \sqrt{B} .

Χωρίζουμε σε επιμέρους κλάσματα και εφαρμόζουμε κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους.

- Ριζικά με το ίδιο υπόριζο διαφορετικών τάξεων

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. κ των τάξεων και των ριζών.

- Θέτουμε $\sqrt[n]{f(x)} = y$, οπότε αφού $x \rightarrow x_0$, τότε: $y \rightarrow \sqrt[n]{f(x_0)}$.

Όριο της μορφής $\frac{0}{0}$ που περιέχει απόλυτες τιμές

1ος τρόπος

- Αν κανένα απόλυτο δεν μπορείται για $x = x_0$

Απαλλάσσουμε την συνάρτηση από τις απόλυτες τιμές, ανάλογα αν οι παραστάσεις μέσα σε αυτές είναι θετικές ή αρνητικές (κάνουμε αντικατάσταση $x = x_0$ και βρίσκουμε το πρόσημο).

Υπολογίζουμε το όριο σύμφωνα με κάποια από τις προηγούμενες μορφές.

- Αν απόλυτο μπορείται για $x = x_0$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων των παραστάσεων που περιέχονται στα απόλυτα.

Παίρνουμε πλευρικά όρια, απαλλάσσοντας, ανάλογα, την συνάρτηση από τις απόλυτες τιμές.

Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, πρέπει: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

2ος τρόπος

Βρίσκουμε το όριο της παράστασης που περιέχεται στο απόλυτο. Με βάση το πρόσημο του ορίου αφαιρούμε τα απόλυτα και υπολογίζουμε το όριο. Αν το όριο της παράστασης που βρίσκεται στο απόλυτο είναι ίσο με μηδέν, τότε όπως και πριν, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Με πράξεις παρεμβάλουμε την ζητούμενη συνάρτηση $f(x)$ ανάμεσα σε δύο άλλες συναρτήσεις:

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, οι οποίες πρέπει να έχουν κοινό όριο όταν $x \rightarrow x_0$.

Παρατήρηση:

Χαρακτηριστικό για την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής είναι η ύπαρξη διπλής ανισότητας $B(x) \leq A(x) \leq \Gamma(x)$ ή $|A(x)| \leq B(x) \Leftrightarrow -B(x) \leq A(x) \leq B(x)$.

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

Τριγωνομετρικά όρια

- Θέτουμε όπου x το x_0 , γιατί: $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma v x = \sigma v x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$
 $\left(x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$.
- Όταν έχουμε απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0} \right)$, τότε προσπαθούμε να εμφανίσουμε τα όρια:
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ & $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma v x - 1}{x} = 0$

Όριο με αλλαγή μεταβλητής

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, θέτουμε $u = g(x)$, βρίσκουμε $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ με $u \neq u_0$ κοντά στο x_0 και στη συνέχεια βρίσκουμε το $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Ειδικά για το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}$, θέτουμε $\alpha x = u$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$.

«Μηδενική χ φραγμένη»

Όταν έχουμε γινόμενο συναρτήσεων των μορφών:

$f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{g(x)}$ ή $f(x) \cdot \sigma v \frac{1}{g(x)}$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής λαμβάνοντας υπόψη ότι $|\eta\mu(\alpha x)| \leq 1$, $|\sigma v(\alpha x)| \leq 1$ και $|\eta\mu x| \leq |x|$.

Όρια με χρήση βοηθητικής συνάρτησης

- Δίνεται: $\lim \left[\Pi(f(x), \dots) \right] = \ell \in \mathbb{R}$. Όπου $\Pi = \text{παράσταση που περιέχει την } f(x) \text{ και ζητείται το } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

.Τότε:

- Θέτουμε $g(x)$ την παράσταση του γνωστού ορίου.
- Λύνουμε ως προς την συνάρτηση $f(x)$.
- Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ μέσω της προηγούμενης σχέσης.

Αν ζητείται η εύρεση του ορίου μίας άλλης συνάρτησης που περιέχει την $f(x)$ και έχουμε απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0} \right)$, τότε μορφοποιούμε με προσθαφαιρέσεις ή παραγοντοποιήσεις το ζητούμενο όριο για να

καταλήξουμε σε παραστάσεις με γνωστά όρια.

Όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$.

« Απομονώνουμε » τον παράγοντα που μηδενίζει τον παρανομαστή.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{g_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{g_2(x)} \right) \text{ με } \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \lambda \neq 0.$$

- Αν $g_1(x) > 0$ τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g_1(x)} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ (ανάλογα με το λ).
- Αν $g_1(x) < 0$ τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g_1(x)} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ (ανάλογα με το λ).

Αν το $g_1(x)$ αλλάζει πρόσημο στο x_0 , με πλευρικά όρια διαπιστώνουμε ότι δεν

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$, οπότε δεν υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$.

Εύρεση παραμέτρων

Όταν ζητούνται οι τιμές των παραμέτρων ώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$

(όπου η $f(x)$ περιέχει παραμέτρους και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$), τότε:

- Θέτουμε: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = h(x)g(x)$
- Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (h(x)g(x)) = 0$ οπότε, προκύπτει μία σχέση με παραμέτρους.
- Χρησιμοποιούμε τη σχέση για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και προκύπτει μία δεύτερη σχέση με παραμέτρους.

Παραμέτρους.
Επιλύουμε το σύστημα των παραμετρικών σχέσεων και προσδιορίζουμε τις τιμές τους.

Όριο πολυωνυμικής - Όριο ρητής

Όριο πολυωνυμικής

Ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου.

Όριο ρητής: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα.

Ισούται με το όριο του πιο λίκου των μεγιστοβάθμιων όρων του αριθμού και του παρανομαστή.

$$\text{Συνάρτηση της μορφής } f(x) = \frac{\sqrt[p]{g(x)} \pm \sqrt[q]{h(x)}}{\sqrt[p]{\varphi(x)} \pm \sigma(x)}$$

- Βγάζουμε κοινό παράγοντα μέσα στο υποόριζο τη δύναμη του x που αντιστοιχεί στην τάξη της ρίζας.
- Βγάζουμε το x έξω από τη ρίζα. Είναι $\sqrt[p]{x^q} = |x|$ και $|x| = x$ (αν $x \rightarrow +\infty$) ή $|x| = -x$ αν $x \rightarrow -\infty$.
- Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x σε αριθμού και παρανομαστή.

Απλοποιούμε και βρίσκουμε το όριο.

$$\text{Συνάρτηση της μορφής } f(x) = \sqrt{A(x)} \pm B(x) \text{ ή } f(x) = \sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)}$$

- Θεωρούμε την παράσταση $\Pi = \sqrt{\alpha_v x^v} \pm \beta_p x^p$ ή $\Pi = \sqrt{\alpha_v x^v} \pm \sqrt{\beta_p x^p}$ όπου $\alpha_v x^v, \beta_p x^p$ οι μεγιστοβάθμιοι όροι των πολυωνύμων $A(x)$ και $B(x)$ αντίστοιχα.
- Αν $\Pi \neq 0$ βγάζουμε κοινό παράγοντα την μεγαλύτερη δύναμη του x και υπολογίζουμε το όριο.
- Αν $\Pi = 0$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση.

Βγάζουμε κοινούς παράγοντες, απλοποιούμε και βρίσκουμε το όριο.

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

Τριγωνομετρικά όρια στο άπειρο

Όριο στο άπειρο με παράσταση της μορφής $\frac{\text{ημ}}{\text{συμ}}$ ή $\frac{1-\sigma\text{υμ}}{\text{συμ}}$

- Αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, τότε θέτουμε $f(x) = u$ και προσπαθούμε να εμφανίσουμε τα βασικά όρια
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ημ}}{u} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sigma\text{υμ}}{u} = 0.$$
- Αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, τότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής (μηδενική επί φραγμένη)

- Όρια συναρτήσεων της μορφής $\frac{f(a^x)}{g(a^x)}$

- Αναλύουμε τις δυνάμεις. Θέτουμε $a^x = u$

Υπολογίζουμε το όριο που προκύπτει με την αλλαγή της μεταβλητής.

- Όρια συναρτήσεων μορφής $\frac{f(a^x, \beta^x)}{g(a^x, \beta^x)}$

- Αναλύουμε τις δυνάμεις.

- Βγάζουμε κοινό παράγοντα σε αριθμοτή και παρανομαστή.

- αν $x \rightarrow +\infty$ τη δύναμη της μεγαλύτερης βάσης.

- αν $x \rightarrow -\infty$ τη δύναμη της μικρότερης βάσης. (στόχος είναι να εμφανίσουμε όρια που τείνουν στο 0).

- Βρίσκουμε το όριο που προκύπτει.

Όταν έχουμε παράμετρο στη βάση διακρίνουμε περιπτώσεις.

Όριο σύνθετης συνάρτησης στο άπειρο

- Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x))$, θέτουμε $g(x) = u$
- Για τη λογαριθμική συνάρτηση, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- **Συνέχεια στο $x = x_0$**

- Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ή τα πλευρικά όρια της f στο x_0 αν f αλλάζει τύπο εκατέρωθεν του x_0 .

- Βρίσκουμε το $f(x_0)$.

Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, τότε f είναι συνεχής στο x_0 .

- **Παραμετρικές συνέχειας**

Θα πρέπει η συνάρτηση να είναι συνεχής και στα σημεία που αλλάζει τύπο.

- Βρίσκουμε τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και το $f(x_0)$.

- Πρέπει: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν και υπολογίζουμε τις παραμέτρους.

- **Συνέχεια σε διάστημα**

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, τότε και οι συναρτήσεις:

$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f^v, \sqrt{|f|}, f \pm \kappa, \kappa f, |f|, f^{-1}, \text{fog, gof}$ είναι επίσης συνεχείς.

Επίσης, όλες οι συναρτήσεις των οποίων ο τύπος ορίζεται με πράξεις βασικών συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς.

Βασικές Μεθοδολογίες στους Μιγαδικούς-Συναρτήσεις-Όρια

Υπολογισμός $f(x_0)$ μέσω συνέχειας

Όταν δίνεται μία σχέση για μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 και ζητείται το $f(x_0)$, το οποίο δεν μπορεί να βρεθεί απ' ευθείας από την f , τότε:

- Λύνουμε τη δοθείσα σχέση ως προς $f(x)$, θέτοντας όλους τους περιορισμούς.
- Υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , ισχύει: $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Για την εύρεση του ορίου θα χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε από τις μεθόδους υπολογισμού ορίων θεωρούμε απαραίτητες.

Συναρτησιακές σχέσεις

Συνέχεια συνάρτησης f μέσω συναρτησιακής σχέσης $f(x+y)=\dots$

Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\alpha \in \mathbb{R}$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Θέτουμε: $x - x_0 = h - \alpha \Leftrightarrow x = (x_0 - \alpha) + h$ όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow \alpha$. Τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow \alpha} f((x_0 - \alpha) + h) = \dots$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in D_f$, οπότε και σε όλο το D_f .

Συνέχεια συνάρτησης f μέσω συναρτησιακής σχέσης $f(xy)=\dots$

Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\alpha \in \mathbb{R}$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

- Θέτουμε: $\frac{x}{x_0} = \frac{h}{\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{x_0}{\alpha} \cdot h$. Όταν $x \rightarrow x_0$ είναι $h \rightarrow \alpha$. Τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow \alpha} f\left(\frac{x_0}{\alpha} \cdot h\right) = \dots$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in D_f$, οπότε και σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Απόδειξη συνέχειας από ανισοτική σχέση

- Θέτουμε στη σχέση όπου x το x_0 για να βρούμε το $f(x_0)$.
- Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, συνήθως με κριτήριο παρεμβολής.
- Ελέγχουμε αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ορισμένες φορές ίσως χρειάζεται να τροποποιήσουμε την αρχική σχέση για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω βήματα.