

Διαγώνισμα Στατιστικής 2014-15

Λύσεις

Θέμα Α

A.1 Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιπτώς αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

A.2 a) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ στ) Σ ζ) Σ η) Σ θ) Σ ι) Λ

Θέμα Β

B.1 Εστω C το πλάτος των κλάσεων, τότε $x_2 = 2 + C$, $x_3 = x_2 + C = 2 + 2C$, $x_4 = x_3 + C = 2 + 3C$

$$\text{Όμως } 16 = x_3 + \frac{C}{2} \Leftrightarrow 16 = 2 + 3C + \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{7C}{2} = 14 \Leftrightarrow C = 4$$

Αν $[\alpha, \beta)$ η πρώτη κλάση, τότε $\alpha = 2 - \frac{C}{2} = 2 - 2 = 0$ και $\beta = \alpha + C = 4$, οπότε οι κλάσεις είναι: $[0, 4)$, $[4, 8)$, $[8, 12)$, $[12, 16)$, $[16, 20)$.

B.2 Είναι $v_3 = 3v_1$, $v_5 = v_1$ και $f_2 = \frac{v_2}{2v} = 0,30 \Leftrightarrow v_2 = 0,60v$

$$F_3\% = 70 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0,70 \Leftrightarrow$$

$$\frac{v_1 + v_2 + v_3}{2v} = 0,70 \Leftrightarrow v_1 + 0,6v + 3v_1 = 1,40v \Leftrightarrow$$

$$4v_1 = 0,8v \Leftrightarrow v_1 = 0,2v \Leftrightarrow f_1 = \frac{v_1}{2v} = 0,1 = F_1.$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 0,40, \quad F_3 = F_2 + f_3 \Leftrightarrow f_3 = 0,30$$

$$F_4 = F_3 + f_4 \Leftrightarrow 0,9 = 0,7 + f_4 \Leftrightarrow f_4 = 0,20$$

$$\text{Επειδή } F_5 = 1, \text{ είναι } f_5 = 1 - 0,9 = 0,10$$

$[..-..)$	x_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0-4	2	10	10
4-8	6	30	40
8-12	10	30	70
12-16	14	20	90
16-20	18	10	100
Σύνολο		100	

B.3 Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

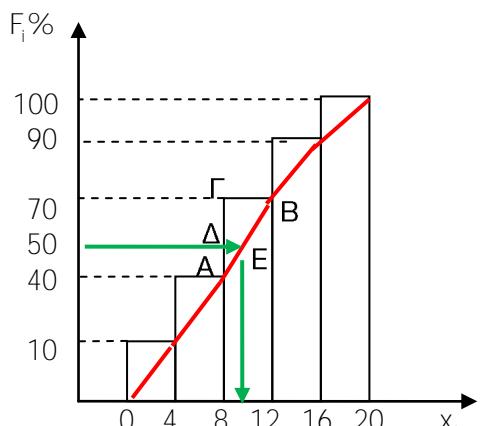
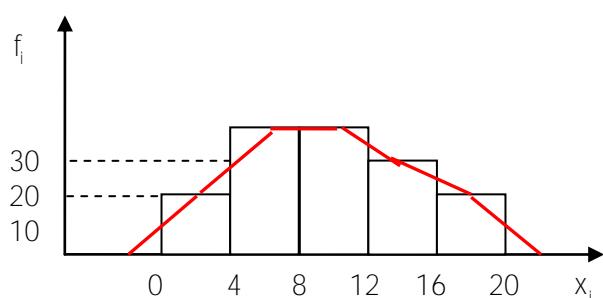
$$\frac{\Delta\delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{50-40}{70-40} = \frac{\delta-8}{12-8} \Leftrightarrow \frac{10}{30} = \frac{\delta-8}{4} \Leftrightarrow$$

$$3\delta - 24 = 4 \Leftrightarrow \delta = \frac{28}{3} = 9,33$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = 2 \cdot 0,10 + 6 \cdot 0,30 + 10 \cdot 0,30 + 14 \cdot 0,20 + 18 \cdot 0,10 = 9,6$$

B.4



Επειδή $\delta < \bar{x}$ η κατανομή έχει θετική ασυμμετρία.

B.5 Οι καινούργιες σχετικές συχνότητες είναι:

$$f'_1 = \frac{0,10}{0,90} = \frac{1}{9}, f'_2 = \frac{0,30}{0,90} = \frac{3}{9}, f'_3 = \frac{0,30}{0,90} = \frac{3}{9} \text{ και}$$

$$f'_4 = \frac{0,20}{0,90} = \frac{2}{9}. \text{ Η νέα μέση τιμή είναι:}$$

$$\bar{x}' = 2 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{3}{9} + 10 \cdot \frac{3}{9} + 14 \cdot \frac{2}{9} = \frac{26}{3}$$

$[..-..)$	x_i	f_i	f'_i
0–4	2	0,10	$\frac{1}{9}$
4–8	6	0,30	$\frac{3}{9}$
8–12	10	0,30	$\frac{3}{9}$
12–16	14	0,20	$\frac{2}{9}$
Σύνολο		0,90	

Θέμα Γ

$$\Gamma.1 \quad \delta = \frac{\beta + \beta}{2} = \beta \Leftrightarrow \beta = 7$$

$$\bar{x} = \frac{\alpha + 2 \cdot 7 + \gamma}{4} = 8 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 18 \text{ και } R = \gamma - \alpha = 8. \text{ Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:}$$

$$2\gamma = 26 \Leftrightarrow \gamma = 13 \text{ και } \alpha + 13 = 18 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

Γ.2 Επειδή $n=9$, η διάμεσος είναι η πέμπτη παρατήρηση. Επειδή η μικρότερη από τις

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 είναι το 13, η πέμπτη παρατήρηση είναι το 13, άρα $\delta = 13$.

$$\Gamma.3 \quad \bar{x}_{\text{ολ}} = \frac{5 + 2 \cdot 7 + 13 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{9} = \frac{32 + \sum_{i=1}^5 x_i}{9} = \frac{32 + 103}{9} = 15$$

$$\Gamma.4 \quad \text{Είναι } \sum_{i=1}^9 x_i^2 = 5^2 + 2 \cdot 7^2 + 13^2 + \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 25 + 98 + 169 + 1769 = 2229$$

Αν s είναι η τυπική απόκλιση των δείγματος των 9 τιμών, τότε

$$s^2 = \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^9 x_i \right)^2}{9} \right) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^9 x_i \right)^2}{9^2} = \frac{1}{9} 2061 - \left(\frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = 229 - 15^2 = 229 - 225 = 4 \Leftrightarrow s = 2$$

Θέμα Δ

$$\Delta.1 \quad \text{Είναι } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{20} = \frac{4 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{16}{100} > 10\%, \text{ οπότε το δείγμα των τιμών } x_i, i=1,2,\dots,100,$$

δεν είναι ομοιογενές.

Αν προσθέσουμε σε όλες τις τιμές $x_i, i=1,2,\dots,100$ μια σταθερά στόχει οι νέες τιμές θα

$$\text{είναι: } y_i = x_i + c, \text{ οπότε } \bar{y} = \bar{x} + c = 20 + c, s_y = s = 4 \text{ και } CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{20 + c}.$$

Για να είναι το δείγμα των τιμών $y_i, i=1,2,\dots,n$ ομοιογενές, πρέπει

$$CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{4}{20+c} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 40 \leq 20+c \Leftrightarrow c \geq 20, \text{ άρα } c_{\min} = 20.$$

Δ.2 Εστω \bar{f} η μέση τιμή των $f(x_i)$, $i=1,2,\dots,v$, τότε $\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^v f(x_i)}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v}$.

$$\text{Είναι } s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right) \Leftrightarrow 16 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v^2} \Leftrightarrow 16 = \bar{f} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$16 = \bar{f} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow 16 = \bar{f} - 400 \Leftrightarrow \bar{f} = 416$$

Δ.3 Αν η κατανομή ήταν κανονική τότε στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s) \equiv (16, 24)$ θα βρίσκονταν το 68% των τιμών. Όμως στο διάστημα αυτό βρίσκονται μόνο 30 από τις 100 τιμές της μεταβλητής, δηλαδή το 30% του δείγματος, άρα η κατανομή δεν είναι κανονική.

Δ.4 Είναι $s^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (x_i - 20)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} (x_i - 20)^2 = 1600$ και

$$\sum_{i=1}^{100} (x_i - 20)^2 = (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_{100} - 20)^2 \geq (x_i - 20)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_i - 20)^2 \leq 1600 \Leftrightarrow |x_i - 20| \leq 40 \Leftrightarrow -40 \leq x_i - 20 \leq 40 \Leftrightarrow -20 \leq x_i \leq 60$$

Δ.5 Εστω ότι στις τιμές x_1, x_2, \dots, x_{20} προσθέτουμε το 4 και έστω ότι στις τιμές $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{80}$ αφαιρούμε το 3, τότε η μέση τιμή των νέων τιμών είναι:

$$\bar{x}' = \frac{x_1 + 4 + x_2 + 4 + \dots + x_{20} + 4 + x_{21} - 3 + x_{22} - 3 + \dots + x_{80} - 3 + x_{81} + x_{82} + \dots + x_{100}}{100} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i + 4 \cdot 20 - 3 \cdot 60}{100} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} + \frac{80 - 180}{100} = 20 - 1 = 19$$