ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο ο x A $\in$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$

γ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) $(\ln|x|)' = -\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

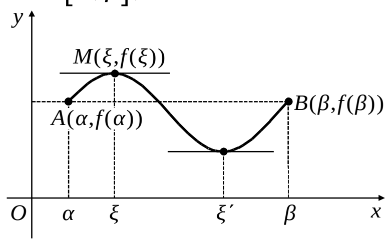
Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Α3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f\circ g)(x)=x^2-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι α = β = -1

Μονάδες 5

Β2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

Μονάδες 6

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}\circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση
$\varphi(x)=\sqrt{(g^{-1}\circ f)(x)}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)+2\le h(x)\le g(x)+2$, για κάθε $x\in[0,1]$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1}h(x)=2$ (μονάδες 3).

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Απαντήσεις

Β1. Είναι $A_f=A_g=\mathbb{R}$. $A_{f\circ g}=\{x\in A_g\,/\,g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,(x+\beta)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(x+\beta)^2+\alpha=x^2+2\beta x+\beta^2+\alpha$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=x^2-2x\Leftrightarrow x^2+2\beta x+\beta^2+\alpha=x^2-2x\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2\beta=-2\\ \beta^2+\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-1\\ 1+\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-1\\ \alpha=-1\end{cases}$$

Β2. Είναι $f(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή $1\ne-1$ και $f(-1)=f(1)=2$, η f δεν είναι 1-1.

Είναι $g(x)=x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

1ος τρόπος:

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$ άρα η g 1-1 άρα αντιστρέφεται.

2ος τρόπος:

Η g είναι ευθεία με $\lambda=1$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

3ος τρόπος:

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η g 1-1 άρα αντιστρέφεται.

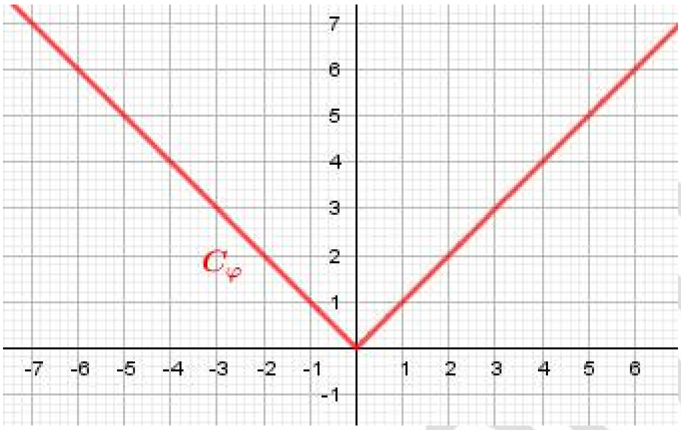
Θέτουμε $g(x)=y\Leftrightarrow x-1=y\Leftrightarrow x=y+1$, άρα $g^{-1}(y)=y+1,\ y\in\mathbb{R}$, οπότε $g^{-1}(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

B3. $A_{g^{-1}\circ f}=\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_{g^{-1}}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ (x^2-1)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(g^{-1}\circ f)(x)=g^{-1}(f(x))=f(x)+1=x^2-1+1=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi(x)=\sqrt{(g^{-1}\circ f)(x)}=\sqrt{x^2}=|x|$ με

$A_\varphi=\{x\in A_{g^{-1}\circ f}\ /\ (g^{-1}\circ f)(x)\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2\geq 0\}=\mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



B4. i. Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $f(x)+2\leq h(x)\leq g(x)+2\Leftrightarrow x^2-1+2\leq h(x)\leq x-1+2\Leftrightarrow$

$x^2+1\leq h(x)\leq x+1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2$.

ii. Θέτουμε $h(x)=u$. Όταν $x\to 1$ τότε $u\to 2$ αφού $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2$ άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}=\lim_{u\to 2}\frac{\sqrt{u+7}-3}{u^2-4}=\lim_{u\to 2}\frac{(\sqrt{u+7}-3)(\sqrt{u+7}+3)}{(u-2)(u+2)(\sqrt{u+7}+3)}=\lim_{u\to 2}\frac{(\sqrt{u+7})^2-9}{(u-2)(u+2)(\sqrt{u+7}+3)}=$$

$$\lim_{u\to 2}\frac{u+7-9}{(u-2)(u+2)(\sqrt{u+7}+3)}=\lim_{u\to 2}\frac{\cancel{u-2}}{\cancel{(u-2)}(u+2)(\sqrt{u+7}+3)}=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2,f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 8

Γ2. Έστω (ε): y=3x-2 η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος Γ1. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Μ(0,α) με -2<α <2. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες x= -1 και x= +1 υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 9

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x,x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t)>0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο Ν(-2, -8) και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 8

Απαντήσεις

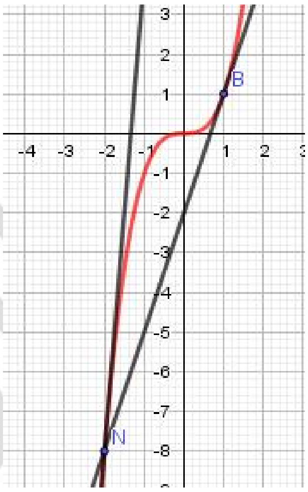
Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$.

Έστω $A(x_0,f(x_0))$, $x_0\in\mathbb{R}$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία

η: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)\Leftrightarrow y=3x_0^2x-2x_0^3$

Η η διέρχεται από το Ν αν και μόνο αν $f(-2)=3x_0^2(-2)-2x_0^3\Leftrightarrow 2x_0^3+6x_0^2-8=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0^3+3x_0^2-4=0\overset{\text{horner}}{\Leftrightarrow}(x_0-1)(x_0^2+4x_0+4)=0\Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0^2+4x_0+4=0\Leftrightarrow(x_0+2)^2=0\Leftrightarrow x_0=-2$



Οι ζητούμενες εφαπτομένες έχουν εξισώσεις

$y=3(-2)^2x-2(-2)^3\Leftrightarrow y=12x+16$ και

$y=3\cdot1^2x-2\cdot1^3\Leftrightarrow y=3x-2$

Γ2. Είναι $\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon=3$. Η ευθεία ζ έχει εξίσωση:

$y-\alpha=3(x-0)\Leftrightarrow y=3x+\alpha$

Αρκεί η εξίσωση $f(x)=3x+\alpha\Leftrightarrow x^3-3x-\alpha=0$ να έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Έστω $g(x)=x^3-3x-\alpha,\ x\in[-1,1]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(-1)=-1+3-\alpha=2-\alpha>0,\ g(1)=1-3-\alpha=-2-\alpha<0$, δηλαδή $g(-1)g(1)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=3x+\alpha$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $g'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)<0\Rightarrow g\searrow(-1,1)$, οπότε η ρίζα του Θ.Bolzano είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

Γ3. Οι συντεταγμένες του Ν τη τυχαία χρονική στιγμή $t\geq0$ είναι $(x(t),y(t))$, όπου $y(t)=x^3(t)$ με $x(t)\in[-2,0)$. Είναι $y'(t)=3x^2(t)x'(t)$.

Αναζητούμε το σημείο στο οποίο $y'(t)=3x'(t)\Leftrightarrow \cancel{3}x^2(t)\cancel{x'(t)}=\cancel{3}\cancel{x'(t)}\Leftrightarrow x^2(t)=1\overset{x(t)<0}{\Leftrightarrow}x(t)=-1$

Άρα $M(-1,-1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\sigma\upsilon\nu^3x+f'(x)\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x-1=0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\eta\mu x-\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)>4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος Δ3.

Μονάδες 7

Απαντήσεις

Δ1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

1^ος^ τρόπος:

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$f(x)\sigma\upsilon\nu^3x+f'(x)\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x-1=0\overset{:\sigma\upsilon\nu^2x}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)\sigma\upsilon\nu^{\cancel{3}}x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2}x}+\frac{f'(x)\cancel{\sigma\upsilon\nu^2x}\cdot\eta\mu x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2}x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=0\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$$

2^ος^ τρόπος:

$$g'(x)=f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{f'(x)\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^2x+f(x)\sigma\upsilon\nu^3x-1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=0$$

Άρα $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

Είναι $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3}-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{\cancel{6\sqrt{3}}+6-\cancel{6\sqrt{3}}}{6}=1$ άρα $c=1$, οπότε

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g(x)=1\Leftrightarrow f(x)\eta\mu x-\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow f(x)\eta\mu x=1+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

Δ2.

1^ος^ τρόπος:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2x}\cdot\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}(-\eta\mu x)=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{\eta\mu^3x-\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x}$$

2^ος^ τρόπος:

$$f(x)\sigma\upsilon\nu^3x+f'(x)\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x-1=0\Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x=1-f(x)\sigma\upsilon\nu^3x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x=1-\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\sigma\upsilon\nu^3x\Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x-\frac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu x}-\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot \eta\mu x = \eta\mu^2 x - \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot \eta\mu x = \frac{\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu x} \text{ για κάθε } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x} \ge 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x \ge 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x \ge \sigma\upsilon\nu^3 x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^3 x \ge 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x \ge 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \overset{\nearrow}{\Rightarrow} x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right).$$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{4}$, το $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = +\infty + 1 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = 1 + +\infty = +\infty$

Στο διάστημα $\Delta_1 = \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(2\sqrt{2},+\infty\right)$. Επειδή $3\sqrt{2}\in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1)=3\sqrt{2}$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left(2\sqrt{2},+\infty\right)$. Επειδή $3\sqrt{2}\in f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_2)=3\sqrt{2}$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Δ4. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{\pi}{4},\rho_2\right]$, οπότε υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\pi}{4},\rho_2\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho_2) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\frac{4\rho_2-\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{4\rho_2 - \pi}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f''(x) = \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)' = \frac{\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f'\nearrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\xi<\rho_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\rho_2) \Leftrightarrow f'(\rho_2) > \frac{4\sqrt{2}}{4\rho_2-\pi} \Leftrightarrow f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi) > 4\sqrt{2}$