

## ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Εστω  $f(x) = e^x + 2x - 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται

b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $I = \int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x) dx$ .

2. Δίνεται συνάρτηση  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[1, 10]$  της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 8)$  και  $B(10, 13)$ . Να δείξετε ότι:  $\int_1^{10} f(x) dx + \int_8^{13} f^{-1}(x) dx = 122$

3. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  $f(x) + f(2-x) = g(x) + g(2-x)$

για κάθε  $x \in [0, 2]$ . Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 g(x) dx$

4. Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[a, b]$  για την οποία ισχύει:  $f(x) + f(a+b-x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι:  $\int_a^b f(x) dx = [f(a) + f(b)] \cdot \frac{b-a}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$ .

5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει:

$\int_0^1 f(x) \left( \int_0^1 f(x) dx \right) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx + 3$ . Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

6. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:  $\int_0^1 e^{1-x} \cdot f(x) dx = f(x) + e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

7. a) Δείξτε ότι  $x^2 \ln x > x - 3$  για κάθε  $x > 1$ .  
 b) Δείξτε ότι  $\int_2^{10} (x^2 \cdot \ln x + 3) dx > 48$ .

8. Εστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ορισμένη στο  $(0, +\infty)$ . Να δείξετε ότι:

a.  $f(x) \leq 1/e$       b.  $\int_e^5 x^e dx \leq \int_e^5 e^x dx$

9. Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^{2007} x dx \leq \frac{\pi}{2}$ .

10. Να αποδείξετε ότι  $\frac{4}{e} \leq \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \cdot e^x dx \leq 4e$ .

11. Εστω  $f$  συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη με  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Εστω  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ . Να δειχθεί ότι:

i.  $f(x) - f(a) \leq f'(b)(x-a)$  για κάθε  $x \in [a, b]$       ii.  $2 \int_a^b f(x) dx \leq f'(b)(b-a)^2 + 2f(a)(b-a)$ .

12. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

a)  $F_1(x) = \int_3^x (\ln t + 2t) dt$       b)  $F_2(x) = \int_{-3}^x \sqrt{t^2 - 4} dt$       γ)  $F_3(x) = \int_2^{-x^2+4x} \frac{\sigma u v t}{t} dt$       δ)  $F_4(x) = \int_{x-3}^{2-x} \frac{\ln(t-2)}{\sqrt{4-t}} dt$

13. Να βρείτε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει:

$$x + \int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x), \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

14. Να βρείτε συνάρτηση  $f$  συνεχή στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:  $f(x) = \int_0^x 2ue^{u^2+4-f(u)}du, x \in \mathbb{R}$ .

15. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$\int_a^x e^{-t}f(t)dt = e^{-x} - e^{-a} - e^{-x}f(x) \text{ για κάθε } a, x \in \mathbb{R}.$$

16. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει:  $\int_1^x xf(t)dt = f(x) - x$  για κάθε  $x > 0$ .

17. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:  $f(x) = (e^x + 1) \left( 2e^{-x} + \int_0^x \frac{f(t)}{e^t + 1} dt \right), x \in \mathbb{R}$ .

18. Να βρείτε συνάρτηση  $f$ , συνεχή στο  $(0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει:  $f(x) = \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(xt)}{t} dt, x > 0$ .

19. Δίνεται συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο  $[0, 5]$  με  $f(x) > 3$  για κάθε  $x \in (0, 5)$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x + 5 = \int_0^x f(t)dt \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα στο } (0, 5).$$

20. Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[a, b]$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [a, b]$  τέτοιο, ώστε

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$$

21. Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[0, 2]$  με  $3 \int_0^2 f(x)dx = 8$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \xi^2.$$

22. Δίνονται οι συνεχείς στο  $[a, b]$  συναρτήσεις  $g, h$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi) \int_\xi^b h(u)du = h(\xi) \int_a^\xi g(u)du.$$

23. Να αποδείξετε ότι: a)  $\int_1^x e^{t^2} dt \leq \frac{1}{2}(e^{x^2} - e), x \in \mathbb{R}$       b)  $\int_0^{e^x} e^{t^3} dt \geq \int_0^{x+1} e^{t^3} dt, x \in \mathbb{R}$

24. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Άν  $0 < f'(x) < 2$  για κάθε  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι  $\int_0^x f^3(t)dt \leq 2 \left( \int_0^x f(t)dt \right)^2$  για κάθε  $x \geq 0$ .

25. Αν για τη συνεχή συνάρτηση  $f$  για κάθε  $x > 0$  ισχύει ότι:  $\int_1^x f(t)dt + 3x^2 \leq 2\ln x + x^3 + 2$ , να βρείτε την τιμή  $f(1)$ .

26. Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:  $\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x (x-t)f(t)dt$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

27. Εστω  $f, g$  συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  με  $\int_1^x f(t)dt - 2x^2 \leq \int_1^x g(t)dt - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η εξίσωση  $x^3f(x) = xg(x) + 2$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(0, 1)$ .

28. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{10} < \int_1^3 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_1^2 \frac{1}{1+t^2} dt < \frac{1}{5}$ .

29. Δίνεται συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = e^{\int_0^x f(t)dt} - \ln x$  έχει το πολύ ένα κρίσιμο σημείο στο  $(0, +\infty)$ .

30. Δίνεται συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο  $[a, b]$  με  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ . Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{\int_a^x tf(t)dt}{\int_a^x f(t)dt}$ ,  $x \in (a, b]$ .

31. Δίνεται συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη και κοίλη στο  $\mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ ,  $a > 0$  είναι κοίλη στο  $(0, +\infty)$ .

32. Να βρείτε τα όρια: a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \int_2^{2x} \sqrt{te^t} dt$   
 β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^{x+1}}{\ln(3+t^2)} dt$ .

33. Να βρείτε τα όρια: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^2+3} dt$   
 β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{3t^2+2}{t^2+2} dt$ .

34. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^{2007} + x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- I. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- II. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  και τις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$ .

35. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- I. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- II. Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τη διχοτόμη της πρώτης γωνίας των αξόνων.
- III. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

36. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$ .

Να βρείτε το εμβαδό που καθορίζεται από τη  $C_f$  και τις ασύμπτωτες αυτής.

37. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = e^{2x} - x + 2$  και τις ευθείες  $\varepsilon_1: y = x + 3$  και  $\varepsilon_2: x = 1$ .

38. Εστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1)=1$ . Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$g(x) = \int_1^x |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0, \text{ όπου } z = a + bi \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}^*, \text{ τότε:}$$

A. Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε την  $g'$ .

B. Να αποδείξετε ότι:  $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

Γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος Β να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$ .

Δ. Αν επιπλέον  $f(2)=a > 0$ ,  $f(3)=\beta$  και  $a > \beta$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (2, 3)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0)=0$ .

39. Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$ , που ικανοποιούν την ισότητα  $(4-z)^{10} = z^{10}$  και η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 + x + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών  $z$  ανήκουν στην ευθεία  $x = 2$ .

B. Αν η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο τομής της με την ευθεία  $x = 2$  τέμνει τον άξονα  $y$  στο σημείο  $y_0 = -3$ , τότε

i. να βρείτε το  $\alpha$  και την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ )

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ), του άξονα  $x$  και της ευθείας  $x = \frac{3}{5}$ .

40. A. Εστω δύο συναρτήσεις  $h$ ,  $g$  συνεχείς στο  $[a, b]$ .

Να αποδείξετε ότι αν  $h(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in [a, b]$ , τότε και  $\int_a^b h(x) dx > \int_a^b g(x) dx$ .

B. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$ , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

i. Να εκφραστεί η  $f'$  ως συνάρτηση της  $f$ .

ii. Να δείξετε ότι  $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$  για κάθε  $x > 0$ .

iii. Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις

ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  και τον άξονα  $x$ , να δείξετε ότι  $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$ .

41. Εστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

A. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

B. Να αποδείξετε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

C. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, 0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

D. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=3$ .

ΣΤΕΛΙΟΣ ΜΙΧΑΗΛΟΥ