



# ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

## Επαναληπτικό διαγώνισμα 1ου Κεφαλαίου

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να δώσετε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης και του συνόλου τιμών της.

Μονάδες 3 + 3

**A2.** Να δώσετε τον ορισμό της  $1 - 1$  συνάρτησης.

Μονάδες 3

**A3.** Δίνεται η  $1 - 1$  συνάρτηση  $f$ , να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

Μονάδες 6

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2n+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

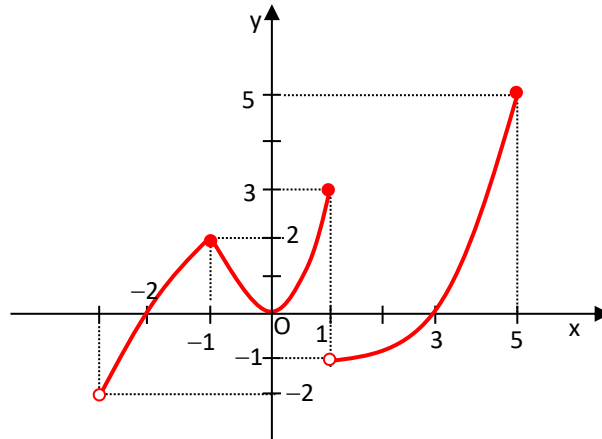
**δ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

**ε)** Αν  $f(x) > 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , τότε κατ' ανάγκη  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$ .

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



Να βρείτε:

**B1.** το πεδίο ορισμού της  $f$  και το σύνολο τιμών της  $f$ .

Μονάδες 2 + 2

**B2.** τα ακρότατα της  $f$ , αν υπάρχουν.

Μονάδες 2

**B3.** τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

Μονάδες 2

**B4.** τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3) \cdot f(x)}, \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{(x+2) \cdot f(x)}$$

και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3 + 3 + 4 + 4

**B5.** Πάνω στο σχήμα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $|f|$ .

Μονάδες 3

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = e^x$$

**Γ1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

Μονάδες 5

**Γ2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$  με  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της.

Μονάδες 8

**Γ3.** Αν  $\phi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\phi$  ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

**Γ4.** Αν  $\phi$  η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi(x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ Δ**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi \end{cases} \text{ με } \lambda > 0,$$

τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$  και να βρείτε το  $\ell$ .

Μονάδες 5

**Δ2.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

Μονάδες 3

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{f(x)} - 1) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)}$ .

Μονάδες 5

**Δ4.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \cdot f(x) - \beta}{x^2} = 2$ , Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 5

**Δ5.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης τη  $f$  να εξετάσετε αν η  $f$  είναι  $1-1$  και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες  $3 + 2 + 2$

Askisopolis