Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών με ύλη έως και τη συνέχεια συνάρτησης

2020-21

Συμμετέχουν οι Μαθηματικοί:

Αντώνης Βαλέργας , Απόστολος Κακαβάς , Άγγελος Μπλιάς , Στέλιος Μιχαήλογλου, Δημήτρης Πατσιμάς , Βαγγέλης Ραμαντάνης , Νίκος Τούντας

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α3. «Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε και η $|f|$ δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για μια συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in A_f$.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$.

γ) Αν $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x))=\gamma$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)=x+2f(1)-3$, $x\in\mathbb{R}$ και $(g\circ f)(x)=x^3+3x(x+1)+3$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$.

Μονάδες 3

Β2. Να δείξετε ότι $g(x)=x^3+2$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια: **α)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)-1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(|f(x)|-1\right)^3}{\eta\mu\left(g(x)-2\right)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)$

Μονάδες 2+3+3

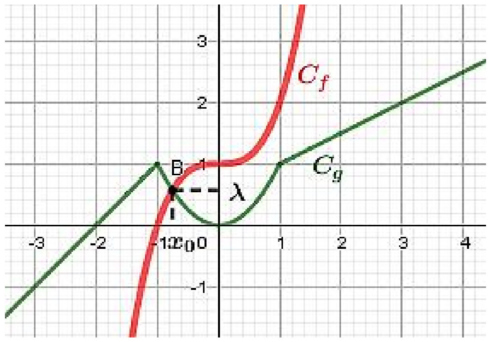
Β4. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία να ισχύει ότι $(h\circ f)(x)=(f\circ h)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Β5. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}.

Μονάδες 4

Θέμα Γ



Έστω οι συναρτήσεις f, g του διπλανού σχήματος και η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} g(x)-\lambda, & x<x_0 \\ f(x)-\lambda, & x\ge x_0 \end{cases}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x)=\sqrt{f(x)-1}+\ln g(x)$

Μονάδες 2

Γ2. Να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $\varphi\circ g$.

Μονάδες 4

Γ3. Να υπολογίσετε , αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x+1)}{|f(x)|}$

γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(1-g(x))^2}$

Μονάδες 12

Γ4. Να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα της h.

Μονάδες 4

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{h(x)}$.

Μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x+|3x-1|)$ και $g(x)=\ln(-2x+1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g δεν είναι ίσες. Στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

6 μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\sqrt[2021]{g(x)}$ αντιστρέφεται και ότι η h^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

6 μονάδες

Δ3. Να δείξετε ότι $h\left(x^{2020}\right)\neq h(x)+3$.

6 μονάδες

Δ4. Να ορίσετε την h^{-1} και να λύσετε την εξίσωση $h^{1789}(x)-h^{-1}(-x)=-\sqrt[2020]{1-x}+1$ για $x\le 0$.

7 μονάδες

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$

$$\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0)$$

Α2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$ και $\lim_{x\to\beta^-}f(x)=f(\beta)$.

Α3.α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x\le x_0\\ -1, & x>x_0\end{cases}$, $x_0\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}f(x)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό, όμως $|f(x)|=1,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=1=|f(x_0)|$.

Α4. α) Λ β) Σ, γ) Σ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

Β1. Για x = 1 είναι $f(1)=1+2f(1)-3\Leftrightarrow -f(1)=-2\Leftrightarrow f(1)=2$, οπότε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$.

Β2. Είναι $f(x)=x+2\cdot 2-3=x+1$. Θέτουμε $f(x)=u\Leftrightarrow x+1=u\Leftrightarrow x=u-1$. Τότε

$$g(f(x))=x^3+3x(x+1)+3\Leftrightarrow g(u)=(u-1)^3+3(u-1)u+3\Leftrightarrow$$

$$g(u)=u^3-3u^2+3u-1+3u^2-3u+3=u^3+2,\ u\in\mathbb{R}$$, άρα $g(x)=x^3+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Β3. α) $$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-1}{f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=3$$

β) $$\lim_{x\to0}\frac{\left(|f(x)|-1\right)^3}{\eta\mu\left(g(x)-2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(|x+1|-1\right)^3}{\eta\mu\left(x^3\right)}$$

Είναι $\lim_{x\to0}(x+1)=1>0$ άρα $x+1>0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο 0, οπότε

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(|x+1|-1\right)^3}{\eta\mu\left(x^3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\cancel{1}-\cancel{1}\right)^3}{\eta\mu\left(x^3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\eta\mu\left(x^3\right)}\underset{\substack{x\to0\\u\to0}}{\overset{x^3=u}{=}}\lim_{u\to0}\frac{u}{\eta\mu u}=\lim_{u\to0}\frac{1}{\frac{\eta\mu u}{u}}=1$$

γ) 1ος τρόπος: $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\left(\sqrt{x}\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\right)\right]=+\infty(1-\infty)=-\infty$$

2ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)=+\infty(-1)=-\infty$$

Β4. Είναι $A_{h\circ f}=A_{f\circ h}=\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$(h\circ f)(x)=(f\circ h)(x)\Leftrightarrow h(f(x))=f(h(x))\Leftrightarrow(x+1)^2+\alpha(x+1)+\beta=x^2+\alpha x+\beta+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{\alpha x}+\alpha+\cancel{\beta}=\cancel{x^2}+\cancel{\alpha x}+\cancel{\beta}+\cancel{1}\Leftrightarrow 2x+\alpha=0\Leftrightarrow\begin{cases}2=0 \text{ Αδύνατη}\\ \alpha=0\end{cases}$

Άρα δεν υπάρχει συνάρτηση h που να ικανοποιεί την υπόθεση.

Β5. Θα δείξουμε αρχικά ότι η g είναι 1-1 συνάρτηση, δηλαδή αντιστρέφεται.

1ος τρόπος:

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow x_1^3+2<x_2^3+2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow g$ $1-1$ οπότε η g αντιστρέφεται.

2ος τρόπος:

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1^3+2=x_2^3+2\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow g$ $1-1$ οπότε η g αντιστρέφεται

Θέτουμε $g(x)=y\Leftrightarrow x^3+2=y\Leftrightarrow x^3=y-2$.

Αν $y-2\geq0\Leftrightarrow y\geq2$ τότε $x=\sqrt[3]{y-2}$, ενώ αν $y<2$ τότε $x=-\sqrt[3]{2-y}$, άρα $g^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y-2}, & y\geq2\\ -\sqrt[3]{2-y}, & y<2\end{cases}$

οπότε $g^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}, & x\geq2\\ -\sqrt[3]{2-x}, & x<2\end{cases}$

Θέμα Γ

Γ1. Για να ορίζετε η φ πρέπει: $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ f(x)-1\geq0\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ f(x)\geq1\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\geq0\\ -2<x<0 \text{ ή } x>0\end{cases}\Rightarrow x>0$, άρα

$D_\varphi=(0,+\infty)$.

Γ2. Για να ορίζεται η $\varphi\circ g$ πρέπει: $\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,+\infty)$, οπότε

$D_{\varphi\circ g}=(-2,0)\cup(0,+\infty)$

Γ3. α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)=1(+\infty)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ και

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{g(x)}\underset{\substack{\lim_{x\to0}g(x)=0\\ g(x)>0 \text{ για } x\in(-1,1)}}{\overset{g(x)=u}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{1}{u}=+\infty$$

β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x+1)}{|f(x)|}=\lim\limits_{x\to -1}\left[f(x+1)\dfrac{1}{|f(x)|}\right]=1(+\infty)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to -1}f(x+1)\underset{\substack{x\to -1\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{x+1=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}f(u)=1$ και

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{|f(x)|}\underset{\substack{\lim\limits_{x\to -1}|f(x)|=0\\ |f(x)|>0 \text{ για } x\neq -1}}{\overset{|f(x)|=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty$$

γ) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $0<\lambda<1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[(f(x)+g(x))\dfrac{1}{f(x)-g(x)}\right]=(\lambda+\lambda)(-\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to x_0^-}(f(x)-g(x))=\lambda-\lambda=0$ και $f(x)<g(x)$ για κάθε $x<x_0$ οπότε

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)-g(x)}\underset{\substack{x\to x_0^-\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)-g(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[(f(x)+g(x))\dfrac{1}{f(x)-g(x)}\right]=(\lambda+\lambda)(+\infty)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to x_0^+}(f(x)-g(x))=\lambda-\lambda=0$ και $f(x)>g(x)$ για κάθε $x>x_0$ οπότε

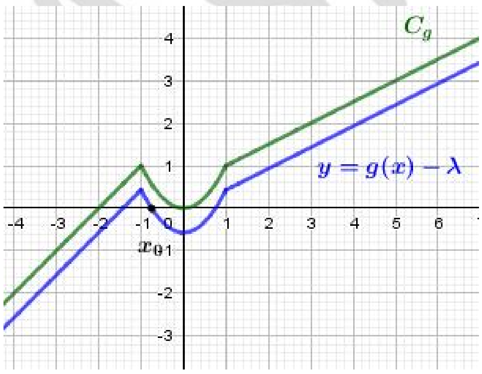
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)-g(x)}\underset{\substack{x\to x_0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)-g(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty.$$

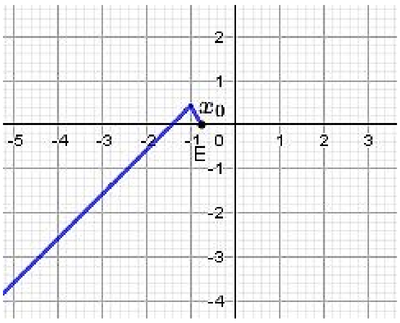
Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$

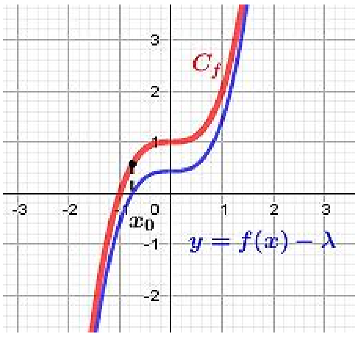
δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(1-g(x))^2}=\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\dfrac{1}{(1-g(x))^2}\right]=2(+\infty)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ και

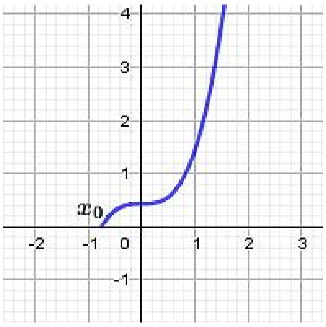
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-g(x))^2}\underset{\substack{\lim\limits_{x\to 1}(1-g(x))^2=0\\ (1-g(x))^2>0 \text{ για } x\in(0,2)}}{\overset{(1-g(x))^2=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty$$

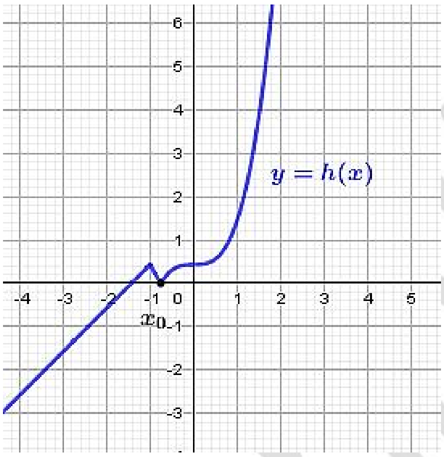
Γ4.











Γ5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{h(x)} \underset{\substack{\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0 \\ h(x)>0 \\ \text{όταν το x είναι κοντά στο } x_0}}{\overset{h(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u} = +\infty$

Θέμα Δ

Δ1. Για την f έχουμε: $x+|3x-1|>0$

Για $x \ge \dfrac{1}{3}$: $4x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{4}$, οπότε για $x\ge \dfrac{1}{3}$ θα είναι $f(x)=\ln(4x-1)$

Για $x<\dfrac{1}{3}$: $-2x+1>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$, οπότε για $x<\dfrac{1}{3}$ θα είναι $f(x)=\ln(-2x+1)$

Οπότε $f(x)=\begin{cases} \ln(4x-1), & x\ge \dfrac{1}{3} \\ \ln(-2x+1), & x<\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Η $g(x)=\ln(-2x+1)$ έχει πεδίο ορισμού το $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$, συνεπώς οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

Στο διάστημα $A_f \cap A_g = \left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$ είναι $f(x)=\ln\left[x+|3x-1|\right] = \ln(-2x+1)=g(x)$

Δ2. Είναι $h(x)=\sqrt[2021]{\ln(-2x+1)}$

Για να ορίζεται η h πρέπει $-2x+1>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$ και $\ln(-2x+1)\ge 0 \Leftrightarrow -2x+1\ge 1 \Leftrightarrow x\le 0$, οπότε $A_h=(-\infty,0]$.

Θα δείξουμε ότι η h είναι συνάρτηση 1-1.

1ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\le 0$ με $h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow \sqrt[2021]{\ln(-2x_1+1)} = \sqrt[2021]{\ln(-2x_2+1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln\left(-2x_1+1\right)=\ln\left(-2x_2+1\right)\Rightarrow -2x_1+1=-2x_2+1\Rightarrow -2x_1=-2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η h είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\le 0$ με $x_1<x_2\le 0\Rightarrow -2x_1>-2x_2\ge 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow -2x_1+1>-2x_2+1\ge 1\Rightarrow \ln\left(-2x_1+1\right)>\ln\left(-2x_2+1\right)\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[2021]{\ln\left(-2x_1+1\right)}>\sqrt[2021]{\ln\left(-2x_1+1\right)}\Rightarrow h\left(x_1\right)>h\left(x_2\right)\Rightarrow h\searrow\left(-\infty,0\right]$$

Άρα η h είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Τώρα θα δείξουμε ότι η h έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την αντίστροφή της.

1ος τρόπος: Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h και το σύνολο τιμών της h^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της h, άρα $h^{-1}\left(x\right)\in A_h$

Για κάθε $x_1,x_2\in A_{h^{-1}}$ με $x_1<x_2\Rightarrow h\left(h^{-1}\left(x_1\right)\right)<h\left(h^{-1}\left(x_2\right)\right)\overset{h\searrow}{\Rightarrow}$

$$\overset{h\searrow}{\Rightarrow} h^{-1}\left(x_1\right)>h^{-1}\left(x_2\right)\Rightarrow h^{-1}\searrow A_{h^{-1}}$$

2ος τρόπος: Έστω ότι η αντίστροφή h^{-1} με πεδίο ορισμού το $h\left(A_h\right)$ δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $h\left(A_h\right)$, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in h\left(A_h\right)$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$h^{-1}\left(x_1\right)\le h^{-1}\left(x_2\right)\overset{h\searrow}{\Rightarrow} h\left(h^{-1}\left(x_1\right)\right)\ge h\left(h^{-1}\left(x_2\right)\right)\Rightarrow x_1\ge x_2 \text{ Άτοπο}$$

Άρα η h^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $h\left(A_h\right)$.

Δ3. $h\left(x^{2020}\right)\ne h\left(x\right)+3$ (1) πρέπει $x^{2020}\le 0$ και $x\le 0$ οπότε η σχέση έχει νόημα μόνον για x = 0 οπότε για x = 0 η (1) γίνεται $h\left(0\right)\ne h\left(0\right)+3$ που ισχύει.

Δ4. Για $y=h\left(x\right)\Leftrightarrow y=\sqrt[2021]{\ln\left(-2x+1\right)}\overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow} y^{2021}=\ln\left(-2x+1\right)\Leftrightarrow e^{y^{2021}}=-2x+1\Leftrightarrow \Leftrightarrow x=\dfrac{1-e^{y^{2021}}}{2}$ (3)

όμως $x\le 0\Leftrightarrow \dfrac{1-e^{y^{2021}}}{2}\le 0\Leftrightarrow 1\le e^{y^{2021}}\Leftrightarrow y^{2021}\ge 0\Leftrightarrow y\ge 0$

Άρα η (3) γίνεται $x=\dfrac{1-e^{y^{2021}}}{2}\Leftrightarrow h^{-1}\left(y\right)=\dfrac{1-e^{y^{2021}}}{2}$, $y\ge 0$.

Επομένως έχουμε $h^{-1}\left(x\right)=\dfrac{1-e^{x^{2021}}}{2}$, $x\ge 0$

Τότε για $x\le 0$: $h^{1789}\left(x\right)-h^{-1}\left(-x\right)=-\sqrt[2020]{1-x}+1\Leftrightarrow h^{1789}\left(x\right)-h^{-1}\left(-x\right)+\sqrt[2020]{1-x}=1$ (4)

Έστω η συνάρτηση $b\left(x\right)=h^{1789}\left(x\right)-h^{-1}\left(-x\right)+\sqrt[2020]{1-x}$, $x\le 0$.

Για κάθε $x_1,x_2\le 0$ με $x_1<x_2\Rightarrow$

$\left(\alpha\right)\ \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h\left(x_1\right)>h\left(x_2\right)\Rightarrow h^{1789}\left(x_1\right)>h^{1789}\left(x_2\right)$

$\left(\beta\right)\ \Rightarrow -x_1>-x_2\overset{h^{-1}\searrow}{\Rightarrow} h\left(-x_1\right)<h\left(-x_2\right)\Rightarrow -h\left(-x_1\right)>-h\left(-x_2\right)$

$\left(\gamma\right)\ \Rightarrow x_1<x_2\le 0\Rightarrow -x_1>-x_2\ge 0\Rightarrow 1-x_1>1-x_2\ge 1\Rightarrow \sqrt[2020]{1-x_1}>\sqrt[2020]{1-x_2}$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (α),(β),(γ) προκύπτει $b\left(x_1\right)>b\left(x_2\right)\Rightarrow b\searrow\left(-\infty,0\right]$.

Παρατηρούμε ότι $b\left(0\right)=h^{1789}\left(0\right)-h^{-1}\left(0\right)+\sqrt[2020]{1}=1$, οπότε:

$\left(1\right)\Leftrightarrow b\left(x\right)=b\left(0\right)\overset{b\searrow\Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$ δεκτή αφού $x\le 0$ και $h\left(0\right)=0=h^{-1}\left(0\right)$.